DOI:10.19322/j.cnki.issn.1006-4710.2020.03.020

区间直觉模糊群决策方法及其在高校人才引进中的应用

马正瑞[1]，李　明[2]，张媛媛[1]

(1.中国矿业大学银川学院 人文学院，宁夏 银川 750021；2.北方民族大学 商学院，宁夏 银川 750021)

摘要：针对高校引进人才的群决策问题，提出了基于连续区间直觉模糊 Einstein 混合几何平均(C-IIFEHGA)算子的多属性群决策方法。首先，构造了连续区间直觉模糊 Einstein 加权几何平均(C-IIFEWGA)算子，连续区间直觉模糊 Einstein 有序加权几何平均(C-IIFEOWGA)算子和连续区间直觉模糊 Einstein 混合几何平均(C-IIFEHGA)算子，并探讨了它们的性质。其次，利用 C-IIFEHGA算子集结群偏好信息，得到综合评价值，并计算其相应的得分函数值对各个候选人才进行排序。最后，通过对高校引进人才的案例分析，表明该方法在高校引才决策中的应用是科学的、合理的。

关键词：群决策；高校人才引进；区间直觉模糊数；集结算子

中图分类号：C934　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**1006-4710(2020)03-0412-12

Interval intuitionistic fuzzy group decision-making method and its application in talent introductionto universities

MA Zhengrui[1], LI Ming[2], ZHANG Yuanyan[1]

(1. School of Humanities, China University of Mining and Technology Yinchuan College, Yinchuan 750021, China; 2. School of Business, North Minzu University, Yinchuan 750021, China)

Abstract: Aiming at the problem of group decision-making in the introduction of talents in universities, a multi-attribute group decision-making method based on continuous interval intuitionistic fuzzy Einstein hybrid geometric average (C-IIFEHGA) operator is proposed. First, the article constructs the continuous interval intuitionistic fuzzy Einstein weighted geometric average (C-IIFEWGA) operator, the continuous interval intuitionistic fuzzy Einstein ordered weighted geometric average (C-IIFEOWGA) operator, and the continuous interval intuitionistic fuzzy Einstein hybrid geometric average (C-IIFEHGA) operator, with their nature discussed. Secondly, the C-IIFEHGA operator is used to aggregate group preference information to obtain a comprehensive evaluation value, with the corresponding score function value calculated to rank each candidate. Finally, the case analysis of the introduction of talents in colleges and universities shows that the application of this method in the decision-making of college talent introduction is scientific and reasonable.

Key words: group decision-making; talent introduction in universities; interval intuitionistic fuzzy numbers; collective settlement

人才是社会进步和发展的重要资源，是强国的　　坚强后盾。在社会的整个发展过程中存在着许多竞

收稿日期：2020-03-01；　**网络出版日期：**2020-09-01

网络出版地址：https://kns.cnki.net/kcms/detail/61.1294.n.20200901.1631.002.html

基金项目：教育部人文社会科学研究资助项目(18XJC630002)；宁夏自然科学基金资助项目(2020AAC03242)；国家自然科学基金资助项目(71161001)；北方民族大学校级一般科研资助项目(2018XYSSY04)；国家留学基金资助项目

第一作者：马正瑞，男，讲师，硕士，研究方向为决策理论与方法。E-mail:36300742@qq.com

通信作者：李明，男，讲师，博士，研究方向为决策理论与方法。E-mail:liming200451@163.com

争，但核心竞争归根结底还是人才竞争，而高等院校是培养高级人才的主要摇篮。随着社会经济的飞速发展，我国各个高等院校开始意识到高层次人才的引进对提高教学质量、提升教师队伍素质及提高高校综合竞争力的重要性。

高等院校人才引进本质是一系列复杂的决策过程，该过程涉及到高校的师资能力、科研实力和战略发展，需要校方管理者和学科专家共同参与。对于复杂的高校人才引进决策问题，多属性群决策以其特有的优势——集结各个领域专家的智慧来获得更科学的决策结果而越来越引起研究人员的重视[1]。针对多属性群决策问题，文献[2]根据构建的八个属性指标，基于广义有序加权混合对数平均算子提出了高校引进人才的多属性决策方法，以此确定高校人才的最优选拔；许玲[3]提出了基于H-平均的广义直觉信息集成算子，研究了高校向国内外招聘人才的最优决策模型；Yu 等[4]在区间值直觉模糊信息背景下，构建了高校引进人才的多属性群决策模型，并对应聘人才进行了最优排序。

上述研究结果表明，面对高等院校引进人才的决策问题，多属性群决策方法已经得到了很好的应用。然而，文献[2]中决策者用实数描述对候选人才的评价，这会造成决策信息的不完整或信息损失，不能完整地表述决策者的评价意见；尽管文献[3]利用直觉模糊信息来描述对候选人才的评价，但在现实生活中，由于决策信息的不充分、不确定，直觉模糊信息的隶属度和非隶属度用精确值来描述有失信息的完整性；文献[4]决策者通过区间直觉模糊数对候选人才进行了评价，其隶属度和非隶属度都是以区间数形式给出，使区间直觉模糊数具有了双重不确定性，从而降低了数据的处理效率，增加了群决策的难度；该文献中的区间直觉模糊优先平均算子是基于区间直觉模糊集的代数运算法则提出的，这虽然能克服用二元运算进行集结过程最终结果的精度不足，但与一般模糊集的极限情况却不一致。另外，在信息集结过程中，只考虑了隶属度和非隶属度区间左右两个端点的信息，而忽略了区间上其它点的信息，对决策结果有一定的影响。因此，有必要介绍新的群决策方法用于解决高校人才引进的决策问题，以此来提高群决策的准确性和科学性。

在多属性群决策问题中，集结各决策者的评价信息是解决此类决策问题的关键所在[5]。为了提高区间型直觉模糊数的处理效率，降低群决策难度，保证决策信息的完整性，并在信息集结过程中，既能充分考虑区间上每个点的信息，又能在克服用二元运算得到最终结果精度不足的基础上，与一般模糊集运算的极限情况保持相一致。本文在文献[4]的研究背景的基础上，提出了连续区间直觉模糊 Einstein 加权几何平均(C-IIFEWGA)算子，连续区间直觉模糊 Einstein 有序加权几何平均(C-IIFEOWGA)和连续区间直觉模糊 Einstein 混合几何平均(C-IIFEHGA)算子，并且讨论了这些算子的性质。最后，基于 C-IIFEHGA 算子提出了一种解决高校引进人才的多属性群决策方法。通过对比分析，该方法主要优点是将 Einstein 运算和 C-OWA 算子结合，不仅考虑了区间直觉模糊集运算的极限情形，而且全面考虑了隶属度和非隶属度区间上所有的信息点，降低了数据处理的复杂性，提高群决策的合理性和科学性。

1　预备知识

为了便于本文的研究，本小节简单介绍了直觉模糊集、区间直觉模糊集的相关概念和运算法则，以及直觉模糊数的 Einstein 运算法则和 C-OWA 信息集结算子。

1.1　直觉模糊集和区间直觉模糊集

定义 1[6]　设 X 是一个非空集合，$\boldsymbol{A}=\{\langle x,\mu_A(x),v_A(x)\rangle : x\in X\}$ 为 X 上的一个直觉模糊集，其中，函数 $\mu_A: X\to[0,1]$，$v_A: X\to[0,1]$ 且满足 $0\leqslant\mu_A(x)+v_A(x)\leqslant 1$，$\mu_A(x)$ 表示元素 x 属于直觉模糊集 A 的隶属度，$v_A(x)$ 表示元素 x 属于直觉模糊集 A 的非隶属度。数对 $(\mu_A(x),v_A(x))$ 称为一个直觉模糊数，对于每一个直觉模糊数可简单地定义为 $\alpha=(\mu_\alpha,v_\alpha)$，且满足 $\mu_\alpha\in[0,1]$，$v_\alpha\in[0,1]$，$0\leqslant\mu_\alpha+v_\alpha\leqslant 1$。此外：

$$S(\alpha)=\mu_\alpha-v_\alpha \tag{1}$$

称为直觉模糊数 α 的得分函数[7]，而：

$$H(\alpha)=\mu_\alpha+v_\alpha \tag{2}$$

称为直觉模糊数 α 的精确函数[8]。

为了能比较任意两个直觉模糊数 $\alpha=(\mu_\alpha,v_\alpha)$ 和 $\beta=(\mu_\beta,v_\beta)$ 的大小，Xu 和 Yager[9] 根据直觉模糊数的得分函数和精确函数提出了如下的比较方法，我们以定理的形式给出。

定理 1[9]　设 α 和 β 是两个直觉模糊数，

1) 如果 $S(\alpha)<S(\beta)$，则有 $\alpha<\beta$。

2) 如果 $S(\alpha)=S(\beta)$，则有

i) 如果 $H(\alpha)=H(\beta)$，则有 $\alpha=\beta$。

ii) 如果 $H(\alpha)<H(\beta)$，则有 $\alpha<\beta$。

然而，在现实生活中，由于客观事物的复杂性和模糊性，μ_α 和 v_α 的值往往无法用实数表示，而用区间数表示比较适合，因此，Atanassov 和 Gargov[10] 对直觉模

糊集进行了拓展,得到区间直觉模糊集,其定义见下。

定义 2[10] 设 Y 是一个非空集合, $\widetilde{A}=\{\langle y,\widetilde{\mu}_{\widetilde{A}}(y),\widetilde{v}_{\widetilde{A}}(y)\rangle : y\in Y\}$ 为 Y 上的一个区间直觉模糊集,其中,函数 $\widetilde{\mu}_{\widetilde{A}}(y)\subseteq[0,1]$, $\widetilde{v}_{\widetilde{A}}(y)\subseteq[0,1]$ 且满足 $0\leqslant \mathrm{Sup}(\widetilde{\mu}_{\widetilde{A}}(y))+\mathrm{Sup}(\widetilde{v}_{\widetilde{A}}(y))\leqslant 1$,则数对 $(\widetilde{\mu}_{\widetilde{A}}(y),\widetilde{v}_{\widetilde{A}}(y))$ 称为区间直觉模糊数。为了计算方便,可简记为 $\widetilde{\alpha}=(\widetilde{\mu}_{\widetilde{\alpha}},\widetilde{v}_{\widetilde{\alpha}})=([a^{\mathrm{L}},a^{\mathrm{U}}],[b^{\mathrm{L}},b^{\mathrm{U}}])$,且满足 $[a^{\mathrm{L}},a^{\mathrm{U}}]\subseteq[0,1]$, $[b^{\mathrm{L}},b^{\mathrm{U}}]\subseteq[0,1]$, $a^{\mathrm{U}}+b^{\mathrm{U}}\leqslant 1$。

为了便于定义,在本文中,用 M 表示所有直觉模糊数所组成的集合,Ω 表示所有区间直觉模糊数所组成的集合。

1.2 直觉模糊数的 Einstein 运算

设 $\alpha=(\mu_\alpha,v_\alpha)$ 和 $\beta=(\mu_\beta,v_\beta)$ 为任意两个直觉模糊数,$k>0$ 为任意实数,则直觉模糊数的 Einstein 乘积运算,Einstein 求和运算、Einstein 数乘运算以及 Einstein 幂运算[11-12]可定义如下:

$$\begin{cases}\alpha\otimes_{\mathrm{E}}\beta=\left(\dfrac{\mu_\alpha\mu_\beta}{1+(1-\mu_\alpha)(1-\mu_\beta)},\dfrac{v_\alpha+v_\beta}{1+v_\alpha v_\beta}\right)\\ \alpha\oplus_{\mathrm{E}}\beta=\left(\dfrac{\mu_\alpha+\mu_\beta}{1+\mu_\alpha\mu_\beta},\dfrac{v_\alpha v_\beta}{1+(1-v_\alpha)(1-v_\beta)}\right)\\ k\alpha=\left(\dfrac{(1+\mu_\alpha)^k-(1-\mu_\alpha)^k}{(1+\mu_\alpha)^k+(1-\mu_\alpha)^k},\dfrac{2v_\alpha^k}{(2-v_\alpha)^k+v_\alpha^k}\right)\\ \alpha^k=\left(\dfrac{2\mu_\alpha^k}{(2-\mu_\alpha)^k+\mu_\alpha^k},\dfrac{(1+v_\alpha)^k-(1-v_\alpha)^k}{(1+v_\alpha)^k+(1-v_\alpha)^k}\right)\end{cases}\tag{3}$$

1.3 C-OWA 算子

Yager 于 2004 年提出连续区间有序加权平均(C-OWA)算子[13],该算子借助于态度参数将区间数表示成实数形式,且态度参数直接反映了决策者的风险态度,其定义如下。

定义 3[13] 设区间数 $\widetilde{x}=[x^{\mathrm{L}},x^{\mathrm{U}}]$,有:

$$F_Q([x^{\mathrm{L}},x^{\mathrm{U}}])=\int_0^1\frac{\mathrm{d}Q(y)}{\mathrm{d}y}[x^{\mathrm{U}}-y(x^{\mathrm{U}}-x^{\mathrm{L}})]\mathrm{d}y\tag{4}$$

则称 F 是连续区间的 OWA 算子,简称为 C-OWA 算子,$Q(y)$ 为基本的 BUM 函数。

为了简化式(4),C-OWA 算子满足如下定理。

定理 2[13] 设 $\gamma=\int_0^1 Q(y)\mathrm{d}y$ 为 BUM 函数 $Q(y)$ 的态度参数,则有:

$$F_Q([x^{\mathrm{L}},x^{\mathrm{U}}])=\gamma x^{\mathrm{U}}+(1-\gamma)x^{\mathrm{L}}\tag{5}$$

当 $x^{\mathrm{L}}=x^{\mathrm{U}}$ 时,区间数 $\widetilde{x}=[x^{\mathrm{L}},x^{\mathrm{U}}]$ 退化为一个实数,则有 $F_Q([x^{\mathrm{L}},x^{\mathrm{L}}])=x^{\mathrm{L}}$。

2 连续区间直觉模糊 Einstein 加权几何集结算子

基于直觉模糊数的 Einstein 运算和 C-OWA 算子,本小节将提出加权几何平均算子用于集结区间直觉模糊偏好信息。

定义 4 设 $\widetilde{\alpha}_i=([a_i^{\mathrm{L}},a_i^{\mathrm{U}}],[b_i^{\mathrm{L}},b_i^{\mathrm{U}}])$, $i=1,2,\cdots,n$ 为一组区间直觉模糊数, n 元函数 C-IIFEWGA: $\Omega^n\rightarrow M$ 满足:

$$\text{C-IIFEWGA}(\widetilde{\alpha}_1,\widetilde{\alpha}_2,\cdots,\widetilde{\alpha}_n)=(G(\widetilde{\alpha}_1))^{w_1}\otimes_{\mathrm{E}}(G(\widetilde{\alpha}_2))^{w_2}\otimes_{\mathrm{E}}\cdots\otimes_{\mathrm{E}}(G(\widetilde{\alpha}_n))^{w_n}\tag{6}$$

称为连续区间直觉模糊 Einstein 加权几何平均算子,简称为 C-IIFEWGA 算子。其中 $G(\widetilde{\alpha}_i)=(F_Q([a_i^{\mathrm{L}},a_i^{\mathrm{U}}]),F_Q([b_i^{\mathrm{L}},b_i^{\mathrm{U}}]))$,且 $F_Q([a_i^{\mathrm{L}},a_i^{\mathrm{U}}])$ 和 $F_Q([b_i^{\mathrm{L}},b_i^{\mathrm{U}}])$ 利用 C-OWA 计算所得; $\boldsymbol{W}=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}$ 是 $\widetilde{\alpha}_i$, $i=1,2,\cdots,n$ 的权重向量,且满足 $w_i\in[0,1]$, $\sum_{i=1}^n w_i=1$。

根据直觉模糊数的 Einstein 运算法则,C-IIFEWGA 算子可以转换为如下的 n 维函数的形式。

定理 3 设 $\widetilde{\alpha}_i=([a_i^{\mathrm{L}},a_i^{\mathrm{U}}],[b_i^{\mathrm{L}},b_i^{\mathrm{U}}])\in\Omega$, $i=1,2,\cdots,n$,则利用 C-IIFEWGA 算子对它们进行信息集结,得到的集结结果是一个直觉模糊数,即:

$$\text{C-IIFEWGA}(\widetilde{\alpha}_1,\widetilde{\alpha}_2,\cdots,\widetilde{\alpha}_n)=$$

$$\left(\frac{2\prod_{i=1}^n(F_Q([a_i^{\mathrm{L}},a_i^{\mathrm{U}}]))^{w_i}}{\prod_{i=1}^n(2-F_Q([a_i^{\mathrm{L}},a_i^{\mathrm{U}}]))^{w_i}+\prod_{i=1}^n(F_Q([a_i^{\mathrm{L}},a_i^{\mathrm{U}}]))^{w_i}},\frac{\prod_{i=1}^n(1+F_Q([b_i^{\mathrm{L}},b_i^{\mathrm{U}}]))^{w_i}-\prod_{i=1}^n(1-F_Q([b_i^{\mathrm{L}},b_i^{\mathrm{U}}]))^{w_i}}{\prod_{i=1}^n(1+F_Q([b_i^{\mathrm{L}},b_i^{\mathrm{U}}]))^{w_i}+\prod_{i=1}^n(1-F_Q([b_i^{\mathrm{L}},b_i^{\mathrm{U}}]))^{w_i}}\right)\tag{7}$$

式中: $\boldsymbol{W}=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}$ 是 $\widetilde{\alpha}_i$, $i=1,2,\cdots,n$ 的权重向量,且满足 $w_i\in[0,1]$, $\sum_{i=1}^n w_i=1$。

证明:首先,利用数学归纳法证明式(7)成立。设 $a_i=[a_i^{\mathrm{L}},a_i^{\mathrm{U}}]$, $b_i=[b_i^{\mathrm{L}},b_i^{\mathrm{U}}]$, $i=1,2,\cdots,k+1$,当 $n=2$ 时,利用直觉模糊数 Einstein 运算法则和式(4)计算得:

$$\text{C-IIFEWGA}(\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2)=(G(\tilde{\alpha}_1))^{w_1}\otimes_E(G(\tilde{\alpha}_2))^{w_2}=(F_Q(a_1),F_Q(b_1))^{w_1}\otimes_E(F_Q(a_2),F_Q(b_2))^{w_2}=$$

$$\left(\frac{2F_Q^{w_1}(a_1)}{[2-F_Q(a_1)]^{w_1}+F_Q^{w_1}(a_1)},\frac{(1+F_Q(b_1))^{w_1}-(1-F_Q(b_1))^{w_1}}{(1+F_Q(b_1))^{w_1}+(1-F_Q(b_1))^{w_1}}\right)\otimes_E$$

$$\left(\frac{2F_Q^{w_2}(a_2)}{[2-F_Q(a_2)]^{w_2}+F_Q^{w_2}(a_2)},\frac{(1+F_Q(b_2))^{w_2}-(1-F_Q(b_2))^{w_2}}{(1+F_Q(b_2))^{w_2}+(1-F_Q(b_2))^{w_2}}\right)=$$

$$\left(\frac{\frac{2F_Q^{w_1}(a_1)}{[2-F_Q(a_1)]^{w_1}+F_Q^{w_1}(a_1)}\times\frac{2F_Q^{w_2}(a_2)}{[2-F_Q(a_2)]^{w_2}+F_Q^{w_2}(a_2)}}{1+\left(1-\frac{2F_Q^{w_1}(a_1)}{[2-F_Q(a_1)]^{w_1}+F_Q^{w_1}(a_1)}\right)\left(1-\frac{2F_Q^{w_2}(a_2)}{[2-F_Q(a_2)]^{w_2}+F_Q^{w_2}(a_2)}\right)},\right.$$

$$\left.\frac{\frac{(1+F_Q(b_1))^{w_1}-(1-F_Q(b_1))^{w_1}}{(1+F_Q(b_1))^{w_1}+(1-F_Q(b_1))^{w_1}}+\frac{(1+F_Q(b_2))^{w_2}-(1-F_Q(b_2))^{w_2}}{(1+F_Q(b_2))^{w_2}+(1-F_Q(b_2))^{w_2}}}{1+\frac{(1+F_Q(b_1))^{w_1}-(1-F_Q(b_1))^{w_1}}{(1+F_Q(b_1))^{w_1}+(1-F_Q(b_1))^{w_1}}\times\frac{(1+F_Q(b_2))^{w_2}-(1-F_Q(b_2))^{w_2}}{(1+F_Q(b_2))^{w_2}+(1-F_Q(b_2))^{w_2}}}\right)=$$

$$\left(\frac{4F_Q^{w_1}(a_1)F_Q^{w_2}(a_2)}{2\,[2-F_Q(a_1)]^{w_1}\,[2-F_Q(a_2)]^{w_2}+2F_Q^{w_1}(a_1)F_Q^{w_2}(a_2)},\right.$$

$$\left.\frac{2[(1+F_Q(b_1))^{w_1}\,(1+F_Q(b_2))^{w_2}-(1-F_Q(b_1))^{w_1}\,(1-F_Q(b_2))^{w_2}]}{2[(1+F_Q(b_1))^{w_1}\,(1+F_Q(b_2))^{w_2}+(1-F_Q(b_1))^{w_1}\,(1-F_Q(b_2))^{w_2}]}\right)=$$

$$\left(\frac{2\prod_{i=1}^{2}(F_Q(a_i))^{w_i}}{\prod_{i=1}^{2}(2-F_Q(a_i))^{w_i}+\prod_{i=1}^{2}(F_Q(a_i))^{w_i}},\frac{\prod_{i=1}^{2}(1+F_Q(b_i))^{w_i}-\prod_{i=1}^{2}(1-F_Q(b_i))^{w_i}}{\prod_{i=1}^{2}(1+F_Q(b_i))^{w_i}+\prod_{i=1}^{2}(1-F_Q(b_i))^{w_i}}\right)\tag{8}$$

结论成立。假设 $n=k$ 时，结论也成立，即：

$$\text{C-IIFEWGA}(\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\cdots,\tilde{\alpha}_k)=(G(\tilde{\alpha}_1))^{w_1}\otimes_E(G(\tilde{\alpha}_2))^{w_2}\otimes_E\cdots\otimes_E(G(\tilde{\alpha}_k))^{w_k}=$$

$$\left(\frac{2\prod_{i=1}^{k}(F_Q(a_i))^{w_i}}{\prod_{i=1}^{k}(2-F_Q(a_i))^{w_i}+\prod_{i=1}^{k}(F_Q(a_i))^{w_i}},\frac{\prod_{i=1}^{k}(1+F_Q(b_i))^{w_i}-\prod_{i=1}^{k}(1-F_Q(b_i))^{w_i}}{\prod_{i=1}^{k}(1+F_Q(b_i))^{w_i}+\prod_{i=1}^{k}(1-F_Q(b_i))^{w_i}}\right)\tag{9}$$

当 $n=k+1$ 时，则：

$$\text{C-IIFEWGA}(\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\cdots,\tilde{\alpha}_n)=(G(\tilde{\alpha}_1))^{w_1}\otimes_E(G(\tilde{\alpha}_2))^{w_2}\otimes_E\cdots\otimes_E(G(\tilde{\alpha}_k))^{w_k}\otimes_E(G(\tilde{\alpha}_{k+1}))^{w_{k+1}}=$$

$$\left(\frac{2\prod_{i=1}^{k}(F_Q(a_i))^{w_i}}{\prod_{i=1}^{k}(2-F_Q(a_i))^{w_i}+\prod_{i=1}^{k}(F_Q(a_i))^{w_i}},\frac{\prod_{i=1}^{k}(1+F_Q(b_i))^{w_i}-\prod_{i=1}^{k}(1-F_Q(b_i))^{w_i}}{\prod_{i=1}^{k}(1+F_Q(b_i))^{w_i}+\prod_{i=1}^{k}(1-F_Q(b_i))^{w_i}}\right)\otimes_E$$

$$\left(\frac{2F_Q^{w_{k+1}}(a_{k+1})}{[2-F_Q(a_{k+1})]^{w_{k+1}}+F_Q^{w_{k+1}}(a_{k+1})},\frac{(1+F_Q(b_{k+1}))^{w_{k+1}}-(1-F_Q(b_{k+1}))^{w_{k+1}}}{(1+F_Q(b_{k+1}))^{w_{k+1}}+(1-F_Q(b_{k+1}))^{w_{k+1}}}\right)=$$

$$\left(\frac{4\prod_{i=1}^{k}(F_Q(a_i))^{w_i}F_Q^{w_{k+1}}(a_{k+1})}{2\prod_{i=1}^{k}(2-F_Q(a_i))^{w_i}\,[2-F_Q(a_i)]^{w_{k+1}}+2\prod_{i=1}^{k}(F_Q(a_i))^{w_i}F_Q^{w_{k+1}}(a_{k+1})},\right.$$

$$\left.\frac{2\left[\prod_{i=1}^{k}(1+F_Q(b_i))^{w_i}\,(1+F_Q(b_{k+1}))^{w_{k+1}}-\prod_{i=1}^{k}(1-F_Q(b_i))^{w_i}\,(1-F_Q(b_{k+1}))^{w_{k+1}}\right]}{2\left[\prod_{i=1}^{k}(1+F_Q(b_i))^{w_i}\,(1+F_Q(b_{k+1}))^{w_{k+1}}+\prod_{i=1}^{k}(1-F_Q(b_i))^{w_i}\,(1-F_Q(b_{k+1}))^{w_{k+1}}\right]}\right)=$$

$$\left(\frac{2\prod_{i=1}^{k+1}(F_Q(a_i))^{w_i}}{\prod_{i=1}^{k+1}(2-F_Q(a_i))^{w_i}+\prod_{i=1}^{k+1}(F_Q(a_i))^{w_i}},\frac{\prod_{i=1}^{k+1}(1+F_Q(b_i))^{w_i}-\prod_{i=1}^{k+1}(1-F_Q(b_i))^{w_i}}{\prod_{i=1}^{k+1}(1+F_Q(b_i))^{w_i}+\prod_{i=1}^{k+1}(1-F_Q(b_i))^{w_i}}\right)\tag{10}$$

结论成立。因此,根据以上证明,对于任意的n,式(7)都成立。

其次,证明集结结果仍为一个直觉模糊数。

由于$a_i\subseteq[0,1]$,$b_i\subseteq[0,1]$,$a_i^{\mathrm{U}}+b_i^{\mathrm{U}}\leqslant 1$,则根据式(4),可得:

$$\begin{cases}0\leqslant F_Q(a_i)\leqslant 1\\0\leqslant F_Q(b_i)\leqslant 1\end{cases}\tag{11}$$

从而:

$$\begin{cases}0\leqslant\prod_{i=1}^{n}(F_Q(a_i))^{w_i}\leqslant 1\\1\leqslant\prod_{i=1}^{n}(2-F_Q(a_i))^{w_i}\leqslant 2\end{cases}\tag{12}$$

且:

$$\prod_{i=1}^{n}(1+F_Q(b_i))^{w_i}\geqslant\prod_{i=1}^{n}(1-F_Q(b_i))^{w_i}\geqslant 0\tag{13}$$

因此:

$$\frac{2\prod_{i=1}^{n}(F_Q(a_i))^{w_i}}{\prod_{i=1}^{n}(2-F_Q(a_i))^{w_i}+\prod_{i=1}^{n}(F_Q(a_i))^{w_i}}\in[0,1]\tag{14}$$

$$\frac{\prod_{i=1}^{n}(1+F_Q(b_i))^{w_i}-\prod_{i=1}^{n}(1-F_Q(b_i))^{w_i}}{\prod_{i=1}^{n}(1+F_Q(b_i))^{w_i}+\prod_{i=1}^{n}(1-F_Q(b_i))^{w_i}}\in[0,1]\tag{15}$$

$$0\leqslant\frac{2\prod_{i=1}^{n}(F_Q(a_i))^{w_i}}{\prod_{i=1}^{n}(2-F_Q(a_i))^{w_i}+\prod_{i=1}^{n}(F_Q(a_i))^{w_i}}+\frac{\prod_{i=1}^{n}(1+F_Q(b_i))^{w_i}-\prod_{i=1}^{n}(1-F_Q(b_i))^{w_i}}{\prod_{i=1}^{n}(1+F_Q(b_i))^{w_i}+\prod_{i=1}^{n}(1-F_Q(b_i))^{w_i}}\leqslant 1\tag{16}$$

综上可得:

$$\text{C-IIFEWGA}(\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\cdots,\tilde{\alpha}_n)=$$
$$\left(\frac{2\prod_{i=1}^{n}(F_Q(a_i))^{w_i}}{\prod_{i=1}^{n}(2-F_Q(a_i))^{w_i}+\prod_{i=1}^{n}(F_Q(a_i))^{w_i}},\frac{\prod_{i=1}^{n}(1+F_Q(b_i))^{w_i}-\prod_{i=1}^{n}(1-F_Q(b_i))^{w_i}}{\prod_{i=1}^{n}(1+F_Q(b_i))^{w_i}+\prod_{i=1}^{n}(1-F_Q(b_i))^{w_i}}\right)\tag{17}$$

仍为一个直觉模糊数。

证毕。

C-IIFEWGA算子满足幂等性、有界性和单调性,这些性质具体描述见下。

性质1(幂等性) 设$\tilde{\alpha}_i=([a_i^{\mathrm{L}},a_i^{\mathrm{U}}],[b_i^{\mathrm{L}},b_i^{\mathrm{U}}])$,$i=1,2,\cdots,n$为一组区间直觉模糊数,若$\tilde{\alpha}_i=\tilde{\alpha}=([a^{\mathrm{L}},a^{\mathrm{U}}],[b^{\mathrm{L}},b^{\mathrm{U}}])$,$i=1,2,\cdots,n$,则:

$$\text{C-IIFEWGA}(\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\cdots,\tilde{\alpha}_n)=G(\tilde{\alpha})\tag{18}$$

证明:由于$\tilde{\alpha}_i=\tilde{\alpha}=(a,b)$,其中$a=[a^{\mathrm{L}},a^{\mathrm{U}}]$,$b=[b^{\mathrm{L}},b^{\mathrm{U}}]$,$i=1,2,\cdots,n$,则根据式(6),可得:

$$\text{C-IIFEWGA}(\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\cdots,\tilde{\alpha}_n)=(G(\tilde{\alpha}))^{w_1}\otimes_E(G(\tilde{\alpha}))^{w_2}\otimes_E\cdots\otimes_E(G(\tilde{\alpha}))^{w_n}=$$
$$\left(\frac{2\prod_{i=1}^{n}(F_Q(a))^{w_i}}{\prod_{i=1}^{n}(2-F_Q(a))^{w_i}+\prod_{i=1}^{n}(F_Q(a))^{w_i}},\frac{\prod_{i=1}^{n}(1+F_Q(b))^{w_i}-\prod_{i=1}^{n}(1-F_Q(b))^{w_i}}{\prod_{i=1}^{n}(1+F_Q(b))^{w_i}+\prod_{i=1}^{n}(1-F_Q(b))^{w_i}}\right)=\tag{19}$$
$$\left(\frac{2F_Q(a)}{2-F_Q(a)+F_Q(a)},\frac{(1+F_Q(b))-(1-F_Q(b))}{(1+F_Q(b))+(1-F_Q(b))}\right)=(F_Q([a^{\mathrm{L}},a^{\mathrm{U}}]),F_Q([b^{\mathrm{L}},b^{\mathrm{U}}]))=G(\tilde{\alpha})$$

证毕。

性质2(有界性) 设$\tilde{\alpha}_i=([a_i^{\mathrm{L}},a_i^{\mathrm{U}}],[b_i^{\mathrm{L}},b_i^{\mathrm{U}}])$,$i=1,2,\cdots,n$为一组区间直觉模糊数,若$G(\tilde{\beta}_1)=(\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{F_Q([a_i^{\mathrm{L}},a_i^{\mathrm{U}}])\},\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{F_Q([b_i^{\mathrm{L}},b_i^{\mathrm{U}}])\})$,和$G(\tilde{\beta}_2)=(\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{F_Q([a_i^{\mathrm{L}},a_i^{\mathrm{U}}])\},\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{F_Q([b_i^{\mathrm{L}},b_i^{\mathrm{U}}])\})$,则:

$$G(\tilde{\beta}_1)\leqslant\text{C-IIFEWGA}(\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\cdots,\tilde{\alpha}_n)\leqslant G(\tilde{\beta}_2)\tag{20}$$

证明:设T为C-IIFEWGA算子,且$a_i=[a_i^{\mathrm{L}},a_i^{\mathrm{U}}]$,$b_i=[b_i^{\mathrm{L}},b_i^{\mathrm{U}}]$,$i=1,2,\cdots,n$,首先证明$G(\tilde{\beta}_1)\leqslant T(\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\cdots,\tilde{\alpha}_n)$。

由于:

$$G(\tilde{\beta}_1)=(F_Q[\theta_1^{\mathrm{L}},\theta_1^{\mathrm{U}}],F_Q[\rho_1^{\mathrm{L}},\rho_1^{\mathrm{U}}])=(\min_{1\leqslant i\leqslant n}\{F_Q(a_i)\},\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{F_Q(b_i)\})\tag{21}$$

$$\prod_{i=1}^{n}(2-F_Q(a_i))^{w_i}+\prod_{i=1}^{n}(F_Q(a_i))^{w_i}\leqslant\sum_{i=1}^{n}w_i(2-F_Q(a_i))+\sum_{i=1}^{n}w_i(F_Q(a_i))=2\tag{22}$$

$$\prod_{i=1}^{n}(1+F_Q(b_i))^{w_i}+\prod_{i=1}^{n}(1-F_Q(b_i))^{w_i}\leqslant \sum_{i=1}^{n}w_i(1+F_Q(b_i))+\sum_{i=1}^{n}w_i(1-F_Q(b_i))=2 \tag{23}$$

则：

$$\frac{2\prod_{i=1}^{n}(F_Q(a_i))^{w_i}}{\prod_{i=1}^{n}(2-F_Q(a_i))^{w_i}+\prod_{i=1}^{n}(F_Q(a_i))^{w_i}}\geqslant \prod_{i=1}^{n}(F_Q(a_i))^{w_i}\geqslant F_Q[\theta_1^{\mathrm{L}},\theta_1^{\mathrm{U}}] \tag{24}$$

且：

$$\frac{\prod_{i=1}^{n}(1+F_Q(b_i))^{w_i}-\prod_{i=1}^{n}(1-F_Q(b_i))^{w_i}}{\prod_{i=1}^{n}(1+F_Q(b_i))^{w_i}+\prod_{i=1}^{n}(1-F_Q(b_i))^{w_i}}=1-\frac{2\prod_{i=1}^{n}(1-F_Q(b_i))^{w_i}}{\prod_{i=1}^{n}(1+F_Q(b_i))^{w_i}+\prod_{i=1}^{n}(1-F_Q(b_i))^{w_i}}\leqslant$$

$$1-\prod_{i=1}^{n}(1-F_Q(b_i))^{w_i}\leqslant 1-\prod_{i=1}^{n}(1-F_Q[\rho_1^{\mathrm{L}},\rho_1^{\mathrm{U}}])^{w_i}=F_Q[\rho_1^{\mathrm{L}},\rho_1^{\mathrm{U}}] \tag{25}$$

利用式(1)计算得：

$$S(G(\tilde{\beta}_1))=F_Q[\theta_1^{\mathrm{L}},\theta_1^{\mathrm{U}}]-F_Q[\rho_1^{\mathrm{L}},\rho_1^{\mathrm{U}}]\leqslant S(T(\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\cdots,\tilde{\alpha}_n)) \tag{26}$$

即：

$$G(\tilde{\beta}_1)\leqslant T(\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\cdots,\tilde{\alpha}_n) \tag{27}$$

同理可证：

$$T(\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\cdots,\tilde{\alpha}_n)\leqslant G(\tilde{\beta}_2) \tag{28}$$

证毕。

性质 3(单调性) 设 $\tilde{\alpha}_i=([a_i^{\mathrm{L}},a_i^{\mathrm{U}}],[b_i^{\mathrm{L}},b_i^{\mathrm{U}}])$ 和 $\tilde{\eta}_i=([c_i^{\mathrm{L}},c_i^{\mathrm{U}}],[d_i^{\mathrm{L}},d_i^{\mathrm{U}}])$，$i=1,2,\cdots,n$ 是任意两组区间直觉模糊数,若对于所有的 i 恒有 $F_Q([a_i^{\mathrm{L}},a_i^{\mathrm{U}}])\leqslant F_Q([c_i^{\mathrm{L}},c_i^{\mathrm{U}}])$，$F_Q([b_i^{\mathrm{L}},b_i^{\mathrm{U}}])\geqslant F_Q([d_i^{\mathrm{L}},d_i^{\mathrm{U}}])$ 成立，则：

$$\text{C-IIFEWGA}(\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\cdots,\tilde{\alpha}_n)\leqslant \text{C-IIFEWGA}(\tilde{\eta}_1,\tilde{\eta}_2,\cdots,\tilde{\eta}_n) \tag{29}$$

证明：设 T 为 C-IIFEWGA 算子，$a_i=[a_i^{\mathrm{L}},a_i^{\mathrm{U}}]$，$b_i=[b_i^{\mathrm{L}},b_i^{\mathrm{U}}]$，$c_i=[c_i^{\mathrm{L}},c_i^{\mathrm{U}}]$，$d_i=[d_i^{\mathrm{L}},d_i^{\mathrm{U}}]$，$i=1,2,\cdots,n$ 且 $f(t)=(2-t)/t$，$t\in(0,1]$。

因为 $f(t)=(2-t)/t$ 是一个关于 t 的单调递减函数,且 $F_Q(a_i)\leqslant F_Q(c_i)$，则：

$$(2-F_Q(a_i))/F_Q(a_i)\geqslant(2-F_Q(c_i))/F_Q(c_i)\Rightarrow$$
$$\prod_{i=1}^{n}((2-F_Q(a_i))/F_Q(a_i))^{w_i}+1\geqslant\prod_{i=1}^{n}((2-F_Q(c_i))/F_Q(c_i))^{w_i}+1\Leftrightarrow$$
$$\frac{2}{\prod_{i=1}^{n}((2-F_Q(a_i))/F_Q(a_i))^{w_i}+1}\leqslant\frac{2}{\prod_{i=1}^{n}((2-F_Q(c_i))/F_Q(c_i))^{w_i}+1}\Leftrightarrow \tag{30}$$
$$\frac{2\prod_{i=1}^{n}(F_Q(a_i))^{w_i}}{\prod_{i=1}^{n}(2-F_Q(a_i))^{w_i}+\prod_{i=1}^{n}(F_Q(a_i))^{w_i}}\leqslant\frac{2\prod_{i=1}^{n}(F_Q(c_i))^{w_i}}{\prod_{i=1}^{n}(2-F_Q(c_i))^{w_i}+\prod_{i=1}^{n}(F_Q(c_i))^{w_i}}$$

设 $g(t)=(1-t)/(1+t)$，$t\in[0,1]$。因为 $g(t)$ 是一个关于 t 的单调递减函数,且 $F_Q(b_i)\geqslant F_Q(d_i)$，则：

$$\frac{1-F_Q(d_i)}{1+F_Q(d_i)}\geqslant\frac{1-F_Q(b_i)}{1+F_Q(b_i)} \tag{31}$$

于是：

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1-F_Q(d_i)}{1+F_Q(d_i)}\right)^{w_i}+1\geqslant\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1-F_Q(b_i)}{1+F_Q(b_i)}\right)^{w_i}+1 \tag{32}$$

进一步得：

$$\frac{2}{\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1-F_Q(d_i)}{1+F_Q(d_i)}\right)^{w_i}+1}-1\leqslant\frac{2}{\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1-F_Q(b_i)}{1+F_Q(b_i)}\right)^{w_i}+1}-1 \tag{33}$$

于是就有：

$$\frac{2\prod_{i=1}^{n}(1+F_Q(d_i))^{w_i}}{\prod_{i=1}^{n}(1+F_Q(d_i))^{w_i}+\prod_{i=1}^{n}(1-F_Q(d_i))^{w_i}}-1\leqslant\frac{\prod_{i=1}^{n}(1+F_Q(b_i))^{w_i}}{\prod_{i=1}^{n}(1+F_Q(b_i))^{w_i}+\prod_{i=1}^{n}(1-F_Q(b_i))^{w_i}}-1 \tag{34}$$

最后整理得：

$$\frac{\prod_{i=1}^{n}(1+F_Q(d_i))^{w_i}-\prod_{i=1}^{n}(1-F_Q(d_i))^{w_i}}{\prod_{i=1}^{n}(1+F_Q(d_i))^{w_i}+\prod_{i=1}^{n}(1-F_Q(d_i))^{w_i}}\leqslant\frac{\prod_{i=1}^{n}(1+F_Q(b_i))^{w_i}-\prod_{i=1}^{n}(1-F_Q(b_i))^{w_i}}{\prod_{i=1}^{n}(1+F_Q(b_i))^{w_i}+\prod_{i=1}^{n}(1-F_Q(b_i))^{w_i}} \tag{35}$$

根据式(1)计算得：

$$S(T(\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\cdots,\tilde{\alpha}_n))\leqslant S(T(\tilde{\eta}_1,\tilde{\eta}_2,\cdots,\tilde{\eta}_n)) \tag{36}$$

因此：

$$T(\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\cdots,\tilde{\alpha}_n)\leqslant T(\tilde{\eta}_1,\tilde{\eta}_2,\cdots,\tilde{\eta}_n) \tag{37}$$

证毕。

借助于 OWA 算子[14]的思想，将 C-IIFEWGA 算子中的 $G(\tilde{\alpha}_i)$ 按照从大到小的顺序排列，可得区间直觉模糊 Einstein 有序加权几何平均(C-IIFE-OWGA)算子，其定义为如下。

定义 5　设 $\tilde{\alpha}_i=([a_i^{\mathrm{L}},a_i^{\mathrm{U}}],[b_i^{\mathrm{L}},b_i^{\mathrm{U}}])$，$i=1,2,\cdots,n$ 为一组区间直觉模糊数，n 元函数 C-IIFE-OWGA：$\Omega^n\rightarrow M$ 满足：

$$\text{C-IIFEOWGA}(\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\cdots,\tilde{\alpha}_n)=(G(\tilde{\alpha}_{\pi(1)}))^{w_1}\otimes_{\mathrm{E}}(G(\tilde{\alpha}_{\pi(2)}))^{w_2}\otimes_{\mathrm{E}}\cdots\otimes_{\mathrm{E}}(G(\tilde{\alpha}_{\pi(n)}))^{w_n} \tag{38}$$

称为连续区间直觉模糊 Einstein 有序加权几何平均算子，简称为 C-IIFEOWGA 算子。其中 $\boldsymbol{W}=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^T$ 是相关的权重向量，且满足 $w_i\in[0,1]$，$\sum_{i=1}^{n}w_i=1$；$(\pi(1),\pi(2),\cdots,\pi(n))$ 是 $(1,2,\cdots,n)$ 的一个置换，且满足 $G(\tilde{\alpha}_{\pi(i-1)})\geqslant G(\tilde{\alpha}_{\pi(i)})$。

同理，根据直觉模糊数的 Einstein 运算法则，C-IIFEOWGA算子可以转换为如下的 n 维函数的形式。

定理 4　设 $\tilde{\alpha}_i=([a_i^{\mathrm{L}},a_i^{\mathrm{U}}],[b_i^{\mathrm{L}},b_i^{\mathrm{U}}])\in\Omega$，$i=1,2,\cdots,n$，则利用 C-IIFEOWGA 算子对它们进行参数集结，得到的集结结果是一个直觉模糊数，即：

$$\text{C-IIFEOWGA}(\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\cdots,\tilde{\alpha}_n)=\left(\frac{2\prod_{i=1}^{n}(F_Q([a_{\pi(i)}^{\mathrm{L}},a_{\pi(i)}^{\mathrm{U}}]))^{w_i}}{\prod_{i=1}^{n}(2-F_Q([a_{\pi(i)}^{\mathrm{L}},a_{\pi(i)}^{\mathrm{U}}]))^{w_i}+\prod_{i=1}^{n}(F_Q([a_{\pi(i)}^{\mathrm{L}},a_{\pi(i)}^{\mathrm{U}}]))^{w_i}},\frac{\prod_{i=1}^{n}(1+F_Q([b_{\pi(i)}^{\mathrm{L}},b_{\pi(i)}^{\mathrm{U}}]))^{w_i}-\prod_{i=1}^{n}(1-F_Q([b_{\pi(i)}^{\mathrm{L}},b_{\pi(i)}^{\mathrm{U}}]))^{w_i}}{\prod_{i=1}^{n}(1+F_Q([b_{\pi(i)}^{\mathrm{L}},b_{\pi(i)}^{\mathrm{U}}]))^{w_i}+\prod_{i=1}^{n}(1-F_Q([b_{\pi(i)}^{\mathrm{L}},b_{\pi(i)}^{\mathrm{U}}]))^{w_i}}\right) \tag{39}$$

式中：$\boldsymbol{W}=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}$ 是相关的权重向量，且满足 $w_i\in[0,1]$，$\sum_{i=1}^{n}w_i=1$。

C-IIFEOWGA 算子满足幂等性、有界性、单调性和置换不变性，其中幂等性、有界性和单调性与 C-IIFEWGA 算子的性质类似，在此不再赘述，而置换不变性可描述如下。

性质 4（置换不变性）　设 $\tilde{\alpha}_i=([a_i^{\mathrm{L}},a_i^{\mathrm{U}}],[b_i^{\mathrm{L}},b_i^{\mathrm{U}}])$，$i=1,2,\cdots,n$ 为一组区间直觉模糊数，若 $(\tilde{\eta}_1,\tilde{\eta}_2,\cdots,\tilde{\eta}_n)$ 是 $(\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\cdots,\tilde{\alpha}_n)$ 的任一置换，则：

$$\text{C-IIFEOWGA}(\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\cdots,\tilde{\alpha}_n)=\text{C-IIFEOWGA}(\tilde{\eta}_1,\tilde{\eta}_2,\cdots,\tilde{\eta}_n) \tag{40}$$

证明：设 T 为 C-IIFEOWGA 算子，则：

$$T(\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\cdots,\tilde{\alpha}_n)=(G(\tilde{\alpha}_{\pi(1)}))^{w_1}\otimes_E(G(\tilde{\alpha}_{\pi(2)}))^{w_2}\otimes_E\cdots\otimes_E(G(\tilde{\alpha}_{\pi(n)}))^{w_n} \tag{41}$$

和：

$$T(\tilde{\eta}_1,\tilde{\eta}_2,\cdots,\tilde{\eta}_n)=(G(\tilde{\eta}_{\pi(1)}))^{w_1}\otimes_{\mathrm{E}}(G(\tilde{\eta}_{\pi(2)}))^{w_2}\otimes_{\mathrm{E}}\cdots\otimes_{\mathrm{E}}(G(\tilde{\eta}_{\pi(n)}))^{w_n} \tag{42}$$

因为 $(\tilde{\eta}_1,\tilde{\eta}_2,\cdots,\tilde{\eta}_n)$ 是 $(\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\cdots,\tilde{\alpha}_n)$ 的任一置换，则对于所有的 i 都有 $\tilde{\alpha}_{\pi(i)}=\tilde{\eta}_{\pi(i)}$，因此，恒有：

$$T(\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\cdots,\tilde{\alpha}_n)=T(\tilde{\eta}_1,\tilde{\eta}_2,\cdots,\tilde{\eta}_n) \tag{43}$$

成立。

证毕。

由定义 4 可知,C-IIFEWGA 算子主要研究的焦点是强调集结参数本身的重要性,而定义 5 指出 C-IIFEOWG 算子主要研究的焦点是强调了集结参数所处位置的重要性。也就是说,C-IIFEWGA 算子和 C-IIFEOWGA 算子都仅仅只反映了其中的一个方面,具有一定的片面性。因此,基于 C-IIFEWGA 算子和 C-IIFEOWGA 算子,提出连续区间直觉模糊 Einstein 混合几何平均(C-IIFEHGA)算子,其定义为如下。

定义 6 设 $\tilde{\alpha}_i = ([a_i^L, a_i^U], [b_i^L, b_i^U])$, $i = 1, 2, \cdots, n$ 为一组区间直觉模糊数,n 元函数 C-IIFEHGA: $\Omega^n \to M$ 满足:

$$\text{C-IIFEHGA}(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \cdots, \tilde{\alpha}_n) = (\Phi(\tilde{\alpha}_{\pi(1)}))^{\omega_1} \otimes_E (\Phi(\tilde{\alpha}_{\pi(2)}))^{\omega_2} \otimes_E \cdots \otimes_E (\Phi(\tilde{\alpha}_{\pi(n)}))^{\omega_n} \tag{44}$$

称为连续区间直觉模糊 Einstein 混合几何平均算子,简称为 C-IIFEHGA 算子。其中 $(\pi(1), \pi(2), \cdots, \pi(n))$ 是 $(1, 2, \cdots, n)$ 的一个置换,且满足 $\Phi(\tilde{\alpha}_{\pi(i-1)}) \geqslant \Phi(\tilde{\alpha}_{\pi(i)})$;$\Phi(\tilde{\alpha}_{\pi(i)})$ 为数组 $((G(\tilde{\alpha}_1))^{nw_1}, (G(\tilde{\alpha}_2))^{nw_2}, \cdots, (G(\tilde{\alpha}_n))^{nw_n})$ 中第 i 大的数;n 为平衡因子;$\boldsymbol{W} = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^T$ 是 $\tilde{\alpha}_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$ 的权重向量,且满足 $w_i \in [0, 1]$, $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$;$\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)^T$ 为相关的权重向量,且满足 $\omega_i \in [0, 1]$, $\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$。

类似于定理 3,根据直觉模糊数的 Einstein 运算法则,C-IIFEHGA 算子可以转换为如下的 n 维函数形式。

定理 5 设 $\tilde{\alpha}_i = ([a_i^L, a_i^U], [b_i^L, b_i^U]) \in \Omega$, $i = 1, 2, \cdots, n$,则利用 C-IIFEHGA 算子对它们进行参数集结,得到的集结结果是一个直觉模糊数,即:

$$\text{C-IIFEHGA}(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \cdots, \tilde{\alpha}_n) = \left(\frac{2\prod_{i=1}^{n} (F_Q([a_{\pi(i)}^L, a_{\pi(i)}^U]))^{nw_{\pi(i)}\omega_i}}{\prod_{i=1}^{n} (2 - F_Q([a_{\pi(i)}^L, a_{\pi(i)}^U]))^{nw_{\pi(i)}\omega_i} + \prod_{i=1}^{n} (F_Q([a_{\pi(i)}^L, a_{\pi(i)}^U]))^{nw_{\pi(i)}\omega_i}}, \right.$$
$$\left. \frac{\prod_{i=1}^{n} (1 + F_Q([b_{\pi(i)}^L, b_{\pi(i)}^U]))^{nw_{\pi(i)}\omega_i} - \prod_{i=1}^{n} (1 - F_Q([b_{\pi(i)}^L, b_{\pi(i)}^U]))^{nw_{\pi(i)}\omega_i}}{\prod_{i=1}^{n} (1 + F_Q([b_{\pi(i)}^L, b_{\pi(i)}^U]))^{nw_{\pi(i)}\omega_i} + \prod_{i=1}^{n} (1 - F_Q([b_{\pi(i)}^L, b_{\pi(i)}^U]))^{nw_{\pi(i)}\omega_i}} \right) \tag{45}$$

式中:$(\pi(1), \pi(2), \cdots, \pi(n))$ 是 $(1, 2, \cdots, n)$ 的一个置换,且满足 $\Phi(\tilde{\alpha}_{\pi(i-1)}) \geqslant \Phi(\tilde{\alpha}_{\pi(i)})$,其中 $\Phi(\tilde{\alpha}_{\pi(i)})$ 为数组 $((G(\tilde{\alpha}_1))^{nw_1}, (G(\tilde{\alpha}_2))^{nw_2}, \cdots, (G(\tilde{\alpha}_n))^{nw_n})$ 中第 i 大的数;$\boldsymbol{W} = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^T$ 是 $\tilde{\alpha}_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$ 的权重向量,且满足 $w_i \in [0, 1]$, $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$;$\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)^T$ 为相关的权重向量,且满足 $\omega_i \in [0, 1]$, $\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$。

特别地,当 $\boldsymbol{\omega} = (1/n, 1/n, \cdots, 1/n)^T$ 时,则 C-IIFEHGA算子退化为 C-IIFEWGA 算子;当 $\boldsymbol{W} = (1/n, 1/n, \cdots, 1/n)^T$ 时,则 C-IIFEHGA 算子退化为 C-IIFEOWGA 算子。

C-IIFEHGA 算子也具有幂等性、有界性、单调性和置换不变性,这与 C-IIFEOWGA 算子类似,其证明过程可参阅性质 1~4。

3 基于 C-IIFEHGA 算子的群决策方法

考虑以区间直觉模糊值为不确定信息的群决策问题。设 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$ 为高校候选人才集合,$C = \{c_1, c_2, \cdots, c_n\}$ 为有限的属性集,$\boldsymbol{W} = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^T$ 是 n 个属性的权重向量,满足 $w_j \in [0, 1]$ 且 $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, $D = \{d_1, d_2, \cdots, d_l\}$ 为有限的决策者集合,$\boldsymbol{V} = (v_1, v_2, \cdots, v_l)^T$ 是 l 个决策者的权重向量,满足 $v_k \in [0, 1]$ 且 $\sum_{k=1}^{l} v_k = 1$。假设 $\tilde{A}^{(k)} = (\tilde{\alpha}_{ij}^{(k)})_{m \times n}$ 为决策矩阵,其中 $\tilde{\alpha}_{ij}^{(k)} = ([a_{\alpha_{ij}^{(k)}}^L, a_{\alpha_{ij}^{(k)}}^U], [b_{\alpha_{ij}^{(k)}}^L, b_{\alpha_{ij}^{(k)}}^U])$ 是由决策者 $d_k \in D$ 在属性 $c_j \in C$ 下对高校候选人才 $x_i \in X$ 所给的信息评价值,$[a_{\alpha_{ij}^{(k)}}^L, a_{\alpha_{ij}^{(k)}}^U]$ 和 $[b_{\alpha_{ij}^{(k)}}^L, b_{\alpha_{ij}^{(k)}}^U]$ 分别表示决策者 $d_k \in D$ 在属性 $c_j \in C$ 下对高校候选人才 $x_i \in X$ 所给的隶属度范围和非隶属度范围,并且满足 $[a_{\alpha_{ij}^{(k)}}^L, a_{\alpha_{ij}^{(k)}}^U] \subseteq [0, 1]$, $[b_{\alpha_{ij}^{(k)}}^L, b_{\alpha_{ij}^{(k)}}^U] \subseteq [0, 1]$, $a_{\alpha_{ij}^{(k)}}^U + b_{\alpha_{ij}^{(k)}}^U \leqslant 1$, $i = 1, 2, \cdots, m$, $j = 1, 2, \cdots, n$, $k = 1, 2, \cdots, l$。

下面基于 C-IIFEHGA 算子提出一种解决上述群决策问题的方法,具体步骤为如下。

步骤1:利用式(44)将所有决策者提供的区间直觉模糊决策矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{A}}^{(k)}=(\widetilde{\alpha}_{ij}^{(k)})_{m\times n}$, $k=1,2,\cdots,l$ 集结为综合的决策矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{R}}=(\widetilde{r}_{ij})_{m\times n}$, 其中:

$$\begin{cases}\widetilde{r}_{ij}=\text{C-IIFEHGA}(\widetilde{\alpha}_{ij}^{(1)},\widetilde{\alpha}_{ij}^{(2)},\cdots,\widetilde{\alpha}_{im}^{(l)})\\ i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n\end{cases}\tag{46}$$

步骤2:再次利用式(44)对综合决策矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{R}}=(\widetilde{r}_{ik})_{m\times l}$ 中的第 i 行的综合属性值进行集结,即:

$$\widetilde{p}_i=\text{C-IIFEHGA}(\widetilde{r}_{i1},\widetilde{r}_{i2},\cdots,\widetilde{r}_{il}),i=1,2,\cdots,m\tag{47}$$

得到高校候选人才 x_i 的群体综合评价值 $\widetilde{p}_i$, $i=1,2,\cdots,m$。

步骤3:利用式(1)计算综合评价值 $\widetilde{p}_i$, $i=1,2,\cdots,m$ 的得分函数值 $S(\widetilde{p}_i)$, $i=1,2,\cdots,m$;利用式(2)计算综合评价值 $\widetilde{p}_i$, $i=1,2,\cdots,m$ 精确函数值 $H(\widetilde{p}_i)$, $i=1,2,\cdots,m$。

步骤4:根据定理1对 $\widetilde{p}_i$, $i=1,2,\cdots,m$ 按照降序进行排列。

步骤5:根据综合评价值 $\widetilde{p}_i$, $i=1,2,\cdots,m$ 的顺序,对高校候选人才进行排序并从中选择最优的。

4　算例分析

在本小节里,利用本文第3部分所提的方法来解决高校引进人才的群决策问题[4]。某高校打算从海外引进杰出人才,组织了一个由3人组成的专家组,分别为学校校长 d_1, 管理学院院长 d_2 和人事处处长 d_3, 他们将从 c_1 —思想道德、c_2 —科研能力、c_3 —教学技能和 c_4 —教育背景4个方面对5位候选者 x_i, $i=1,2,3,4,5$ 提供的信息资料进行严格的审核,并根据候选人才提供的信息资料给出相应的评价值,具体评价信息值见表1~3。

表1　决策者 d_1 提供的决策矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{A}}^{(1)}$

Tab.1　Decision matrix $\widetilde{\boldsymbol{A}}^{(1)}$ by d_1

x_i	c_1	c_2	c_3	c_4
x_1	([0.6,0.8],[0.1,0.2])	([0.2,0.4],[0.4,0.5])	([0.6,0.7],[0.2,0.3])	([0.4,0.5],[0.2,0.4])
x_2	([0.4,0.7],[0.0,0.1])	([0.5,0.7],[0.1,0.2])	([0.7,0.8],[0.1,0.2])	([0.7,0.8],[0.1,0.2])
x_3	([0.3,0.7],[0.2,0.3])	([0.2,0.4],[0.4,0.5])	([0.1,0.4],[0.4,0.5])	([0.3,0.4],[0.4,0.6])
x_4	([0.7,0.8],[0.1,0.2])	([0.2,0.3],[0.4,0.6])	([0.6,0.8],[0.0,0.2])	([0.6,0.8],[0.0,0.2])
x_5	([0.5,0.6],[0.3,0.4])	([0.7,0.8],[0.0,0.1])	([0.2,0.4],[0.4,0.5])	([0.1,0.3],[0.4,0.6])

表2　决策者 d_2 提供的决策矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{A}}^{(2)}$

Tab.2　Decision matrix $\widetilde{\boldsymbol{A}}^{(2)}$ by d_2

x_i	c_1	c_2	c_3	c_4
x_1	([0.2,0.4],[0.4,0.5])	([0.6,0.7],[0.1,0.2])	([0.5,0.7],[0.1,0.2])	([0.5,0.7],[0.1,0.2])
x_2	([0.6,0.8],[0.0,0.2])	([0.2,0.3],[0.4,0.6])	([0.7,0.8],[0.1,0.2])	([0.2,0.4],[0.4,0.5])
x_3	([0.1,0.4],[0.4,0.5])	([0.8,0.9],[0.0,0.1])	([0.1,0.4],[0.2,0.5])	([0.4,0.7],[0.2,0.3])
x_4	([0.6,0.8],[0.0,0.2])	([0.3,0.8],[0.0,0.1])	([0.2,0.3],[0.4,0.6])	([0.6,0.7],[0.2,0.3])
x_5	([0.2,0.4],[0.5,0.6])	([0.6,0.7],[0.2,0.3])	([0.6,0.8],[0.0,0.2])	([0.1,0.4],[0.3,0.5])

表3　决策者 d_3 提供的决策矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{A}}^{(3)}$

Tab.3　Decision matrix $\widetilde{\boldsymbol{A}}^{(3)}$ by d_3

x_i	c_1	c_2	c_3	c_4
x_1	([0.2,0.4],[0.4,0.5])	([0.2,0.4],[0.4,0.5])	([0.4,0.7],[0.0,0.1])	([0.7,0.9],[0.0,0.1])
x_2	([0.2,0.3],[0.4,0.6])	([0.2,0.3],[0.4,0.6])	([0.6,0.7],[0.2,0.3])	([0.5,0.7],[0.1,0.2])
x_3	([0.7,0.9],[0.0,0.1])	([0.3,0.4],[0.4,0.5])	([0.1,0.3],[0.3,0.5])	([0.2,0.4],[0.4,0.5])
x_4	([0.3,0.8],[0.1,0.2])	([0.1,0.2],[0.4,0.6])	([0.2,0.3],[0.4,0.5])	([0.3,0.4],[0.4,0.6])
x_5	([0.7,0.8],[0.0,0.2])	([0.3,0.8],[0.0,0.1])	([0.4,0.7],[0.2,0.3])	([0.6,0.7],[0.0,0.2])

为了便于计算,我们假设BUM函数为 $Q(y)=y^2$, 属性权重向量为 $\boldsymbol{W}=(0.3,0.2,0.4,0.1)^{\mathrm{T}}$, 专家权重向量为 $\boldsymbol{V}=(0.35,0.35,0.3)^{\mathrm{T}}$。基于以上信息,利用所提的决策方法对5位候选者进行排序,具

体决策过程见下列步骤。

步骤 1：利用式(44)将所有决策者提供的区间值直觉模糊决策矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{A}}^{(k)}=(\widetilde{\alpha}_{ij}^{(k)})_{5\times4}$，$k=1,2,3$ 集结为综合的决策矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{R}}=(\widetilde{r}_{ij})_{5\times4}$，即：

$$\begin{cases}\widetilde{r}_{ij}=\text{C-IIFEHGA}(\widetilde{\alpha}_{ij}^{(1)},\widetilde{\alpha}_{ij}^{(2)},\widetilde{\alpha}_{ij}^{(3)})\\ i=1,2,3,4,5,j=1,2,3,4\end{cases}\tag{48}$$

计算结果见表 4。

表 4　综合决策矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{R}}$

Tab. 4　Collective decision matrix $\widetilde{\boldsymbol{R}}$

$\widetilde{r}_{ij}$	$\widetilde{r}_{i1}$	$\widetilde{r}_{i2}$	$\widetilde{r}_{i3}$	$\widetilde{r}_{i4}$
$\widetilde{r}_{1j}$	(0.377 2, 0.335 1)	(0.369 1, 0.335 1)	(0.561 8, 0.129 2)	(0.587 7, 0.139 7)
$\widetilde{r}_{2j}$	(0.450 8, 0.184 6)	(0.324 8, 0.359 0)	(0.702 6, 0.163 7)	(0.507 9, 0.229 0)
$\widetilde{r}_{3j}$	(0.436 7, 0.229 9)	(0.448 0, 0.303 4)	(0.187 7, 0.364 6)	(0.362 1, 0.375 9)
$\widetilde{r}_{4j}$	(0.624 0, 0.110 1)	(0.256 5, 0.327 9)	(0.347 7, 0.325 2)	(0.540 0, 0.252 7)
$\widetilde{r}_{5j}$	(0.529 3, 0.312 3)	(0.603 8, 0.094 4)	(0.467 0, 0.240 9)	(0.294 2, 0.300 2)

步骤 2：再次利用式(43)对综合决策矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{R}}=(\widetilde{r}_{ij})_{5\times4}$ 中的第 i 行的综合属性值进行集结：

$$\widetilde{p}_i=\text{C-IIFEHGA}(\widetilde{r}_{i1},\widetilde{r}_{i2},\widetilde{r}_{i3},\widetilde{r}_{i4}),i=1,2,3,4,5\tag{49}$$

得到方案 x_i 的群体综合评价值：

$$\begin{cases}\widetilde{p}_1=(0.4689,0.2378)\\ \widetilde{p}_2=(0.5156,0.2055)\\ \widetilde{p}_3=(0.3764,0.3193)\\ \widetilde{p}_4=(0.4450,0.2486)\\ \widetilde{p}_5=(0.5094,0.2334)\end{cases}\tag{50}$$

步骤 3：利用式(1)计算综合评价值 $\widetilde{p}_i$，$i=1,2,3,4,5$ 的得分函数值：$S(\widetilde{p}_1)=0.231\ 1$，$S(\widetilde{p}_2)=0.310\ 1$，$S(\widetilde{p}_3)=0.057\ 1$，$S(\widetilde{p}_4)=0.196\ 4$，$S(\widetilde{p}_5)=0.276\ 0$。

步骤 4：根据定理 1 对 $\widetilde{p}_i$，$i=1,2,3,4,5$ 按照降序进行排列：

$$\widetilde{p}_2>\widetilde{p}_5>\widetilde{p}_1>\widetilde{p}_4>\widetilde{p}_3\tag{51}$$

步骤 5：根据综合评价值 $\widetilde{p}_i$，$i=1,2,3,4,5$ 的顺序，对方案进行排序：

$$x_2\succ x_5\succ x_1\succ x_4\succ x_3\tag{52}$$

因此，最优的候选人才是 x_2，在此人力资源群决策问题中，最优人选是第二个候选者，这与文献[4]的最终决策结果一致，说明本文提的方法是有效的、合理的。但是，两种方法得到的五个候选人才最终排序却不一致。在文献[4]中，五位候选人才的最终排序为：

$$x_2\succ x_4\succ x_5\succ x_1\succ x_3\tag{53}$$

为了进一步说明排序上的差异性，以及所提方法的优越性，现根据已知的客观数据，对本文所提的多属性群决策方法与文献[4]所提的决策方法进行对比分析。

利用文献[4]所给的得分函数公式：

$$S=(2+a^{\mathrm{L}}+a^{\mathrm{U}}-b^{\mathrm{L}}-b^{\mathrm{U}})/4\tag{54}$$

分别计算表 1～3 中候选人才 x_1，x_4 和 x_5 评价值的总得分值，结果见表 5。

表 5　候选人得分对比

Tab. 5　Comparison of candidates' scores

得分值	x_1	x_4	x_5
表 1 总得分值	2.475	2.775	2.300
表 2 总得分值	2.625	2.625	2.300
表 3 总得分值	2.475	1.850	3.000
总得分值	7.575	7.250	7.600

由表 5 可得，在属性权重和决策者权重一致的情况下，利用式(54)计算候选人才 x_5 客观评价信息的总得分值为 7.60，为三个候选人才中最大的；其次是候选人才 x_1 的，总得分值为 7.575，最后是候选人才 x_4 的，总得分值为 7.25。根据定理 1，可得：

$$x_5\succ x_1\succ x_4\tag{55}$$

这与本文所提决策方法得到的最终决策结果是完全一致的。事实上，一方面，根据信息集结算子满足的幂等性可知，利用信息集结算子对偏好信息进行多次集结后并不能改变备选方案本质上的优先顺序[15]。而本文提出的方法在评价信息的集结过程中，C-IIFEHGA 算子既满足了幂等性，又充分考虑了模糊集运算的极限形式，尽可能地将候选人才的客观评价信息的损失降到最低；另一方面，C-IIFEHGA 算子既考虑了每个评价信息所处位置的重要性，又考虑了每个评价信息自身的重要性，且在信息集结过程中，信息集结算子采用的是有序加权平均，

而非简单的加权平均,可去除一些主观因素,有效防止带有主观因素的决策者给出错误的评价[15]。因此,本文提出的决策方法得到的决策结果更客观,更合理。

另外,为了分析不同态度参数对信息集结结果影响。现分别选取不同的态度参数 γ 的值,即 0,0.1,0.2,…,0.8,0.9,1,这些态度参数值都是由决策者所提供,利用本文所提的方法,可得各个候选人才综合评价值的得分函数 S 与态度参数 γ 的关系,见图1。

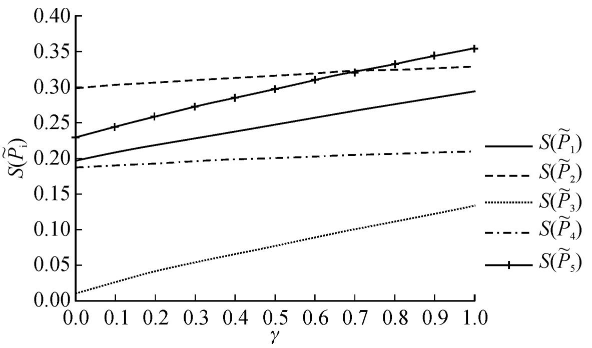

图1 S 与 γ 的关系图

Fig.1 Relationship between S and γ

显然,由图1可知,得分函数值 $S(\widetilde{p}_i)$,$i=1,2,3,4,5$ 都随着态度参数 γ 的增大而单调递增,但增加的幅度不同,$S(\widetilde{p}_1)$、$S(\widetilde{p}_3)$ 和 $S(\widetilde{p}_5)$ 的增加幅度很大,说明候选人 x_1、x_3 和 x_5 对态度参数 γ 的变化非常敏感;而 $S(\widetilde{p}_2)$ 和 $S(\widetilde{p}_4)$ 的增加幅度小,说明候选人 x_2 和 x_4 对态度参数 γ 的变化不是很敏感。

此外,图1还显示如下结论。

1)当 $0\leqslant\gamma\leqslant0.7$ 时,五位候选人才的排序结果为 $x_2\succ x_5\succ x_1\succ x_4\succ x_3$,其中最优候选人为 x_2。

2)当 $0.7<\gamma\leqslant1$ 时,五位候选人才的排序结果为 $x_5\succ x_2\succ x_1\succ x_4\succ x_3$,其中最优候选人为 x_5。

由此可知,随着态度参数 γ 的取值不同,候选人才的排序也随着变化,从而导致产生不同的决策结果。因此,在高校人才引进的群决策问题中,决策者可以根据实际需求和自身的决策心理态度,选择参数 γ 的值来进行科学有效的决策。

5 结 论

在这个全新的时代,人才对于高等院校的长远发展具有不可估量的作用,各个高校非常重视人才引进工作。为了能科学、合理地解决高校引进人才的决策问题,本文提出了几个连续区间直觉模糊Einstein加权几何集结算子,包括C-IIFEWGA算子、C-IIFEOWGA算子和C-IIFEHGA算子。在相关权重取特殊值时,C-IIFEHGA算子可分别退化为C-IIFEWGA算子和C-IIFEOWGA算子,并研究了它们的一些相关性质。此外,基于C-IIFEHGA算子,提出了一种解决高校引进人才群决策问题的方法,对候选人才进行了最优排序。该方法能够将区间直觉模糊数通过态度参数转化为直觉模糊数,充分利用了隶属度和非隶属度区间上所有的信息点,降低了参变量的不确定性和数据处理的复杂性,考虑了集结参数位置的重要性和集结参数自身的重要性,并在克服用二元运算集结所得最终结果精度不足的基础上,与一般模糊集运算的极限情况保持相一致,从而提高了群决策的准确性。此外,通过分析态度参数 γ 在信息集结过程中所发挥的作用,决策者可以根据自己的喜好和实际的需要来选取态度参数值进行群决策,以此保证决策结果的合理性和科学性。

参考文献:

[1] 连晓振,李玉鹏,卢成. 一种权重未知条件下的VIKOR大群体决策方法[J]. 计算机集成制造系统,2017,23(7):1561-1570.
LIAN Xiaozhen, LI Yupeng, LU Cheng. Large group decision making approach based on VIKOR with unknown weights information[J]. Computer Integrated Manufacturing Systems, 2017, 23(7): 1561-1570.

[2] ZHOU Ligang, CHEN Huayou. Generalized ordered weighted logarithm aggregation operators and their applications to group decision making[J]. International Journal of Intelligent systems, 2010, 25(7): 683-707.

[3] 许玲. 基于H-平均的广义直觉信息集成及其应用[J]. 控制工程,2018,25(9):1745-1753.
XU Ling. Generalized intuitionistic information aggregation based on H-means and its application[J]. Control Engineering of China, 2018, 25(9): 1745-1753.

[4] YU Dejian, WU Yingyu, LU Ting. Interval-valued intuitionistic fuzzy prioritized operators and their application in group decision making[J]. Knowledge-Based Systems, 2012, 30: 57-66.

[5] RAHMAN K, ABDULLAH S, AHMED R, et al. Pythagorean fuzzy Einstein weighted geometric aggregation operator and their application to multiple attribute group decision making[J]. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 2017, 33(1): 635-647.

[6] ATANASSOV K. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87-96.

[7] CHEN S M, TAN J M. Handling multicriteria fuzzy

decision-making problems based on vague set theory[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1994, 67(2): 163-172.
[8] HONG D H, CHOI C H. Multicriteria fuzzy decision-making problems based on vague set theory[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2000, 114(1): 103-113.
[9] XU Zeshui, YAGER R R. Some geometric aggregation operators based on intuitionistic fuzzy sets[J]. International Journal of General System, 2006, 35(4): 417-433.
[10] ATANASSOV K, GARGOV G. Interval valued intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1989,31(3): 343-349.
[11] WANG Weize, LIU Xinwang. Intuitionistic fuzzy information aggregation using Einstein operations[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2012, 20(5): 923-938.
[12] GÜMÜŞ S, BALI O. Dynamic aggregation operators based on intuitionistic fuzzy tools and Einstein operations[J]. Fuzzy Information and Engineering, 2017, 9(1): 45-65.
[13] YAGER R R. OWA aggregation over a continuous interval argument with applications to decision making[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics. Part B, Cybernetics: A Publication of the IEEE Systems, Man, and Cybernetics Society, 2004, 34(5): 1952-1963.
[14] YAGER R R. On ordered weighted averaging aggregation operators in multi-criteria decision making[J]. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, 1988, 18(1): 183-190.
[15] 李明. 一种新广义混合比例平均算子及其在多属性群决策中的应用[J]. 数学的实践与认识, 2016, 46(2): 214-224.
LI Ming. A new generalized hybrid proportional averaging operator and its application to multiple attributes group decision making[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2016, 46(2): 214-224.

(责任编辑　王绪迪)

(上接第 375 页)

[19] 高升,林晗,孙会荟,等. 平潭岛土地利用类型变化及驱动力分析[J]. 徐州工程学院学报(自然科学版), 2017,32(2):54-61.
GAO Sheng, LIN Han, SUN Huihui. Analysis on change and driving forces of the usage types of land in Pingtan Island[J]. Journal of Xuzhou Institute of Technology (Natural Sciences Edition), 2017, 32(2): 54-61.
[20] 李慎鹏,曾毅,周盼,等. 基于 RS/GIS 的益阳市土地利用动态变化及驱动力分析[J]. 国土资源导刊,2017,14(3):76-84.
LI Shenpeng, ZENG Yi, ZHOU Pan, et al. Dynamic change and driving force analysis of land use of Yiyang City based on RS/GIS[J]. Land & Resources Herald, 2017, 14(3): 76-84.
[21] 裴杰,王力,柴子为,等. 基于 RS 和 GIS 的深圳市土地利用/覆被变化及碳效应分析[J]. 水土保持研究, 2017,24(3):227-233.
PEI Jie, WANG Li, CHAI Ziwei, et al. Land use/cover and carbon effect in Shenzhen City based on RS and GIS[J]. Reasearch of Soil and Water Conservation. 2017, 24(3): 227-233.
[22] 吴凯,顾晋饴,何宏谋,等. 基于重心模型的丘陵山地区耕地利用转换时空特征研究[J]. 农业工程学报, 2019,35(7):247-254.
WU Kai, GU Jinyi, HE Hongmou, et al. Spatiotemporal characteristics of cultivated land use transition in hilly and mountainous regions based on barycenter model[J]. Transactions of the Chinese Society of Agricultural Engineering, 2019, 35(7): 247-254.
[23] 苏立彬,郭永刚,吴悦,等. 基于 RS 和 GIS 的西藏林芝地区土地利用类型动态变化[J]. 中国农业大学学报, 2019,24(10):170-178.
SU Libin, GUO Yonggang, WU Yue, et al. Dynamic change of land use types in Linzhi prefecture of Tibet based on RS and GIS[J]. Journal of China Agricultural University, 2019, 24(10): 170-178.

(责任编辑　王绪迪)