

DOI:10.19322/j.cnki.issn.1006-4710.2020.04.016

# 基于改进的 K-SVD 和 VMD 的轴承故障特征提取方法

张嘉玲<sup>1</sup>, 武吉梅<sup>1,2</sup>, 胡兵兵<sup>2</sup>

(1. 西安理工大学 机械与精密仪器工程学院, 陕西 西安 710048;

2. 西安理工大学 印刷包装与数字媒体学院, 陕西 西安 710054)

**摘要:** 轴承作为旋转机械的核心零部件, 在工作过程中易受其他部件影响, 造成多部件耦合振动, 产生的故障信号呈现非线性、非平稳特征, 使得与故障信息相关的周期性冲击成分混入大量的背景噪声。传统 K-奇异值分解(K-SVD)在字典学习过程中易受噪声干扰, 难以确定初始化字典和迭代次数, 导致稀疏表示效果较差, 无法有效地提取故障特征。针对以上问题, 提出了基于改进的 K-SVD和变分模态分解(VMD)的轴承故障特征提取方法。通过 VMD 对隐藏的故障特征进行提取, 根据原始数据构造与故障冲击成分高度匹配的初始化字典, 选用包络谱峭度作为 K-SVD 中迭代次数的判断准则, 通过包络分析诊断故障类型。该方法成功应用于两个案例中, 与传统 K-SVD 相比, 在稀疏表示效果、故障提取能力和运行时间上均有优势。

**关键词:** 稀疏表示; K-奇异值分解; 变分模态分解; 故障诊断

**中图分类号:** TH17      **文献标志码:** A      **文章编号:** 1006-4710(2020)04-0551-06

## Feature extraction via improved K-SVD and VMD for bearing fault diagnosis

ZHANG Jialing<sup>1</sup>, WU Jimei<sup>1,2</sup>, HU Bingbing<sup>2</sup>

(1. School of Mechanical and Precision Instrument Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China; 2. School of Printing, Packaging Engineering and Digital Media Technology, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China)

**Abstract:** As the core component of the rotating machinery, bearings are affected by other components during the working process. The multi-component coupling is constantly vibrated, which makes fault signals appear nonlinear and nonstationary. The periodic shock components associated with the fault information are mixed with a large amount of background noise. Unluckily the traditional K-SVD is susceptible to interfering by noise in the process of dictionary learning. In addition, it is difficult to determine initialization dictionaries and the number of iterations, which cannot effectively extract fault features. A sparse representation framework based on the improved K-SVD and VMD is proposed for bearing fault diagnosis, with it adopted to extract the hidden fault characteristics. Then, the envelope spectral kurtosis is selected as the selection criterion for the iteration number in the process of K-SVD. The initial dictionary is learned from original signal, which was highly matched with the fault impact component. Finally, fault types can be identified with envelope analysis. Two cases prove that the proposed method can successfully extract the fault feature, which outperforms the traditional K-SVD in terms of the sparse representation effect, fault extraction ability and running time.

**Key words:** sparse representation; K-SVD; VMD; fault diagnosis

轴承作为工业装备中不可或缺的零部件, 在火车、印刷机、航空发动机等领域应用十分广泛。轴承性

能的优劣直接关乎机械设备生产的经济效益和人身安全<sup>[1]</sup>。通常, 采用振动信号分析的故障诊断方法来判

收稿日期: 2019-11-22; 网络出版日期: 2020-07-07

网络出版地址: <https://kns.cnki.net/kcms/detail/61.1294.N.20200706.1455.002.html>

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51705420, 51905422)

第一作者: 张嘉玲, 女, 博士生, 研究方向为机械设备故障诊断、信号处理。E-mail: zhangjialingxaut@163.com

通信作者: 武吉梅, 女, 博士, 教授, 博导, 研究方向为机械设备智能故障诊断理论与方法。E-mail: wujimei@xaut.edu.cn

断轴承的运行状态<sup>[2]</sup>。但是,在现代装备的轴承发生故障时,因其复杂的机械结构以及非平稳工作状态的影响,检测出的振动信号中含有大量的无关信号成分,使得整个振动信号变得非常庞杂与冗余,导致故障特征微弱且复杂。因此,如何利用少量的数据信息提取轴承微弱故障的特征,成为急需解决的难点问题。

与传统包络分析<sup>[3]</sup>、经验模态分解<sup>[4]</sup>、小波分析<sup>[5]</sup>相比,稀疏表示的出现为上述问题开辟了新的诊断方法。其基本思想是信号可由冗余字典里非常少量的原子通过线性组合来表示,利用有限的数数据获得信号的本质信息<sup>[6]</sup>。字典原子能否有效匹配故障脉冲信号是影响稀疏表示效果的关键因素之一。常用字典包括:分析字典和学习字典。学习字典由于自适应性强,具有较好的稀疏度和重构精度,成为常用的字典构造方法。学习字典通常包括:MOD(method of optimal directions)<sup>[7]</sup>、K-SVD(K-singular value decomposition)<sup>[8]</sup>、MetaFace<sup>[9]</sup>等。K-SVD是通过SVD方法对字典原子逐列更新,而无需像MOD方法对字典中每个原子求逆更新,降低了计算的复杂度。目前K-SVD被广泛应用于图像处理<sup>[10]</sup>和语音识别<sup>[11]</sup>等领域,而在旋转机械的轴承故障诊断领域其研究并不深入。

由于旋转机械工作环境复杂,多元件相互耦合振动,使得故障信号呈现非线性、非平稳特征<sup>[12]</sup>,这些特征信号通常不会表现出完整的周期性衰减的冲击特性。采集到的轴承信号大多淹没在较强的背景噪声中,信噪比较低。传统K-SVD算法在字典学习过程中易受其它噪声干扰,混入虚假原子,影响字典学习效果。此外,K-SVD算法本身也存在局限性,如需人为预设初始化字典和迭代次数,这些数值的设置将直接影响字典的学习能力和诊断的准确度。VMD(variational mode decomposition)算法能够将故障信号中不同频率中心的信号成分进行分离,获得K个模态分量,有效剔除噪声干扰,避免K-SVD字典学习中混入虚假原子。因此,针对上述问题,本文在K-SVD

$$L(\{u_k\}, \{\omega_k\}, \lambda) = \alpha \sum_k \left\| \partial_t \left[ \left( \delta(t) + \frac{j}{\pi t} \right) * u_k(t) \right] e^{-j\omega_k t} \right\|_2^2 + \left\| f(t) - \sum_k u_k(t) \right\|_2^2 + \langle \lambda(t), f(t) - \sum_k u_k(t) \rangle \quad (3)$$

b) 通过引入乘法算子交替方向法解决增广拉格朗日的“鞍点”问题,更新  $u_k^{n+1}$ , 利用 Parseval/Plancherel 傅立叶等距变换, 转换到频域内, 则二次优化问题的解为:

$$\hat{u}_k^{n+1}(\omega) = \frac{\hat{f}(\omega) - \sum_{i \neq k} \hat{u}_i(\omega) + \frac{\hat{\lambda}(\omega)}{2}}{1 + 2\alpha(\omega - \omega_k)^2} \quad (4)$$

字典学习基础上加入了VMD算法,采用包络谱峭度作为K-SVD算法中迭代次数的遴选准则,并根据原始数据构造出与故障冲击成分高度匹配的初始化字典,得到包含较多故障特征的稀疏信号,最终通过包络分析有效地识别轴承故障特征。

## 1 基本原理

### 1.1 变分模态分解算法

在VMD方法<sup>[13]</sup>中,模态被定义为:

$$u_k(t) = A_k(t) \cos(\varphi_k(t)) \quad (1)$$

式中:  $\varphi_k(t)$  为相位非递减函数;  $A_k(t)$  为  $u_k(t)$  的幅值,  $A_k(t) \geq 0$ 。

#### 1) 构造变分问题

若各模态分量为不同中心频率的有限带宽,分解过程中不断地迭代更新中心频率和带宽,将输入信号  $f$  分解成  $K$  个离散的子信号,使每个子信号的估计带宽之和最小,具体构造变分过程:为获得  $u_k$  的解析信号,通过 Hilbert 变换得到其单边频谱,然后加入一个中心频率指数,得到相应的基频带。计算解调信号梯度的平方  $L^2$  范数,估计出每个子信号  $u_k$  的带宽,则约束变分问题变为:

$$\min_{\{u_k\}, \{\omega_k\}} \left\{ \sum_k \left\| \partial_t \left[ \left( \delta(t) + \frac{j}{\pi t} \right) * u_k(t) \right] e^{-j\omega_k t} \right\|_2^2 \right\} \quad (2)$$

s. t.  $\sum_k u_k = f$

式中:  $\{u_k\} = \{u_1, \dots, u_K\}$  表示分解得到的  $K$  个 IMF 分量;  $\{\omega_k\} = \{\omega_1, \dots, \omega_K\}$  为分解得到的各分量的中心频率;  $\sum_k := \sum_{k=1}^K$  为所有模态的总和;  $\omega_k(t) = \varphi'_k(t) \geq 0$  为瞬时频率;  $\delta = 2\pi/\varphi'_k(t)$ 。

#### 2) 求解变分问题

a) VMD 分解方法中采用平衡约束参数  $\alpha$  和拉格朗日乘法算子  $\lambda(t)$  来求解构造的约束变分问题,使变分问题不再受约束条件的限制,引入增广拉格朗日  $L$ :

式中:  $\hat{u}_k^{n+1}(\omega)$  为当前剩余量的维纳滤波。

### 1.2 改进的 K-奇异值分解

从矩阵分解的角度来看,对于给定的训练样本集  $\mathbf{Y}_{n \times M}$ , 其中  $M$  表示训练样本的数量,字典学习的主要思想是将  $\mathbf{Y}$  分解为  $\mathbf{D}_{n \times N}$  和  $\mathbf{S}_{N \times M}$  ( $N$  为字典中的原子数), 满足表达式  $\mathbf{Y} \approx \mathbf{D}\mathbf{S}$ 。传统 K-SVD 算法优化目标函数为<sup>[6]</sup>:

$$\langle \mathbf{D}, \mathbf{S} \rangle = \arg \min_{\mathbf{D}, \mathbf{S}} \|\mathbf{Y} - \mathbf{D}\mathbf{S}\|_{\text{F}}^2 \quad \text{s. t. } \forall i, \|\mathbf{s}_i\|_0 \leq T \quad (5)$$

式中:信号  $\mathbf{Y}$  的稀疏系数向量构造稀疏矩阵  $\mathbf{S}$ ;  $T$  为稀疏度,是指稀疏系数  $\mathbf{s}_i$  中的非零原子数不超过  $T$ ;  $\|\cdot\|_{\text{F}}$  为 Frobenius 范数。

传统 K-SVD 算法需预先设定稀疏度和迭代次数这两个参数,只有同时满足收敛条件和迭代次数才停止更新。然而在实际运算时,无法准确设置这两个参数,导致字典在学习过程中包含了较多无关原子,增大了学习的难度;并且,初始字典是随机构造的矩阵,这使得字典不具有针对性。传统算法不仅学习效果不理想,而且增大了运行时间。因此,对传统 K-SVD 字典学习算法进行改进,具体实现过程如下:

#### 1) 字典初始化

根据原始数据构造与故障冲击成分高度匹配的初始字典  $\mathbf{D}^{(0)}$ 。

#### 2) 稀疏编码

固定初始字典,采用正交匹配追踪算法对目标信号进行稀疏表示,将式(5)的约束条件和目标函数交换,得到稀疏表示系数:

$$\min_{\mathbf{D}, \mathbf{S}} \{\|\mathbf{s}_i\|_0\} \quad \text{s. t. } \forall i, \|\mathbf{Y} - \mathbf{D}\mathbf{S}\|_{\text{F}}^2 \leq \epsilon \quad (6)$$

式中:  $\epsilon$  为逼近误差。

#### 3) 字典更新

固定优化后的稀疏矩阵,逐列更新字典  $\mathbf{D}$ 。步骤 2) 和 3) 交替迭代更新  $I$  次,直至稀疏表示  $\mathbf{D}\mathbf{S}$  逼近信号  $y_i$ ,字典更新为:

$$\begin{aligned} \mathbf{e} = \mathbf{Y} - \mathbf{D}\mathbf{S} &= \mathbf{Y} - \sum_{j=1}^n \mathbf{d}_j \mathbf{s}_j^{\text{T}} = \\ (\mathbf{Y} - \sum_{j \neq i} \mathbf{d}_j \mathbf{s}_j^{\text{T}}) - \mathbf{d}_i \mathbf{s}_i^{\text{T}} &= \mathbf{e}'_j - \mathbf{d}_i \mathbf{s}_i^{\text{T}} \end{aligned} \quad (7)$$

式中:  $\mathbf{d}_i$  为字典  $\mathbf{D}$  中第  $i$  个原子(第  $i$  列);  $\mathbf{s}_i^{\text{T}}$  为稀疏矩阵  $\mathbf{S}$  的第  $i$  行;  $\mathbf{e}'_j$  是除去第  $j$  个原子后的误差矩阵。

为了使  $\mathbf{e} \rightarrow 0$ ,采用 SVD 对  $\mathbf{e}'_j$  分解,  $\mathbf{e}'_j = \mathbf{U}\Delta\mathbf{V}^{\text{T}}$ ,令  $\mathbf{d}_i = \mathbf{U}(:,1)$ ,  $\mathbf{s}_i^{\text{T}} = \Delta(1,1)\mathbf{V}(:,1)$ 。误差随着迭代更新呈单调递减趋势,使得 K-SVD 算法能收敛到全局最小值。

其中,迭代次数采用包络谱峭度作为 K-SVD 算法的遴选准则。轴承表面出现损伤时,通过包络解调提取出只含故障信息的低频冲击脉冲成分,故障特征在包络谱中表现出明显的规律性,对应于包络谱峭度值较大;而噪声则表现得杂乱无章,其包络谱峭度值往往较小。

## 2 改进的 K-SVD 和 VMD 的稀疏表示方法

由于滚动轴承的自身结构特点以及复杂的工作环境,采集的振动信号通常包括:机械内部零部件振动信号、机械设备自身结构振动信号、实际工况的背景噪声等。特别是早期旋转机械设备轴承的故障信号较为微弱,使得故障特征提取困难。而在正常运行状态下,振动信号不包含与故障相关的振动冲击成分。因此,本文针对轴承早期故障信号,在稀疏表示理论的基础上进行优化改进,提出了改进的 K-SVD 字典学习和 VMD 的稀疏表示方法。具体流程如下:

1) 采集轴承振动信号,作为待测信号;

2) 将待测信号进行 VMD 分解,得到若干模态分量,通过定量指标筛选出最佳分量;

3) 根据原始信号构造初始字典;

4) 固定初始字典,采用正交匹配追踪算法进行稀疏编码,求得(近似)最优的系数矩阵;

5) 每次更新一列(用 SVD 求解),固定字典的其它所有列,计算更新后的列及相应稀疏系数,使得式(6)最小化;

6) 根据包络谱峭度准则确定迭代次数,迭代更新步骤 4)、5)  $I$  次直至达到收敛条件;

7) 稀疏信号  $\mathbf{Y}$  包络分析,诊断故障类型。

## 3 实验与分析

### 3.1 实验验证

本节通过美国 Case Western Reserve University 滚动轴承故障模拟实验台数据进行分析验证。实验轴承安装在电机转轴两侧,其中一端为驱动端,另一端为风扇端。本文选用的待测轴承安装在转速为 1 772 r/min 的电动机驱动端,通过固定在轴承座径向载荷方向的传感器采集振动信号,采样频率 12 kHz。通过电火花加工深沟球轴承(SKF6205)的内圈、外圈、滚动体的单点损伤,损伤直径为 0.177 mm。根据轴承特征频率理论计算公式<sup>[14]</sup>,轴承的外圈、内圈、滚动体的故障特征频率分别为  $BPO = 106$  Hz、 $BPI = 160$  Hz、 $BS = 119$  Hz。将采集到的振动信号(均来自同一故障类型的同一组数据)进行时域和频域分析,如图 1 所示。

图 1(a)中,时域波形图虽然呈现出了一些与冲击故障相关的特征,但是与故障特征相关的脉冲信号几乎被大量的背景噪声淹没。对其进行频谱分析,如图 1(b)所示,虽然中高频占比较大,但是仍然无法识别出与故障轴承特征频率相关的值。

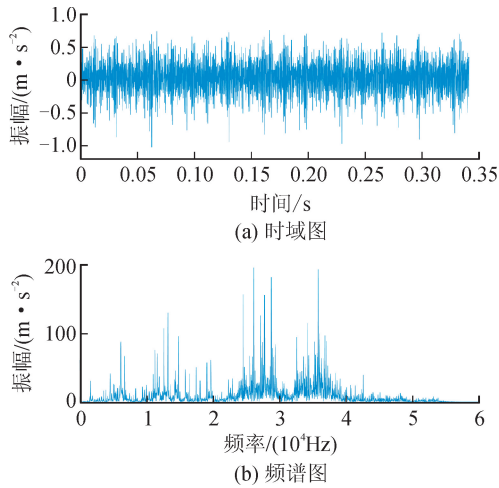


图1 原始信号的时域图和频谱图  
Fig. 1 Time waveform and frequency spectra for the original signal

采用改进的 K-SVD 字典学习和 VMD 分解的轴承故障特征提取方法。首先,将待分析信号进行 VMD 分解( $K=8, \alpha=3600$ ),分解得到 IMF1 ~ IMF8 模态分量,通过定量指标筛选最佳模态分量,根据表 1 选择 IMF3 分量,该模态分量中包含较多的冲击特征,与原信号密切相关。然后,根据采集的振动信号构造初始字典,通过改进的 K-SVD 算法对模态分量进行稀疏编码和字典学习,获得稀疏信号如图 2 所示。

表 1 各 IMF 分量定量指标值

Tab. 1 Quantitative index value of each IMF component

模态分量	峭度	相关系数
IMF1	2.626 1	0.199 5
IMF2	2.674 9	0.362 4
IMF3	4.952 0	0.611 1
IMF4	2.496 0	0.491 7
IMF5	2.382 3	0.300 0
IMF6	1.973 1	0.284 9
IMF7	3.069 8	0.178 1
IMF8	2.241 5	0.158 2

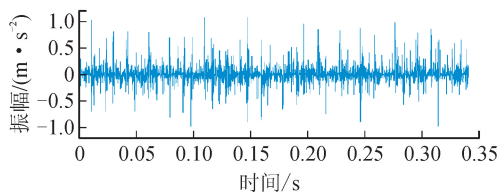


图 2 稀疏信号的时域图  
Fig. 2 Time waveform for the sparse signal

由图 2 可以看出,噪声幅值明显减弱甚至部分消失,周期性冲击成分较为突出。其中,采用包络谱峭度准则确定迭代次数,计算不同迭代次数的包络

谱峭度值,并结合稀疏信号的重构误差,选择最优迭代次数  $I=6$ ,如图 3 所示。迭代次数为 6 时,对应峭度最大的包络谱,此时字典更新的收敛性最好,运行时间相对最短。最终,对重构信号进行包络分析,根据图 4 可有效提取出故障频率 161.1 Hz,噪声幅值在故障频率附近逐渐衰减,与理论计算的深沟球轴承内圈故障频率 160 Hz 相符,说明轴承内圈出现故障。

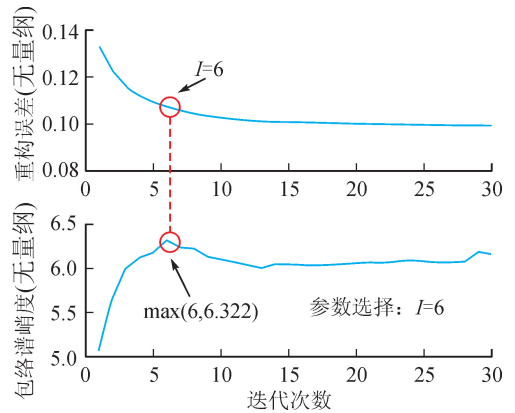


图 3 实验台信号的重构误差及包络谱峭度随迭代次数的变化趋势

Fig. 3 Variable trend of reconstruction error and kurtosis of envelope spectrum for the test bench signal

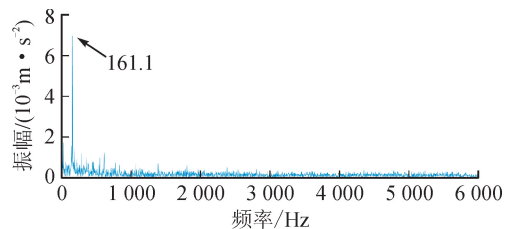


图 4 实验台稀疏信号的包络谱  
Fig. 4 Envelope spectrum of the sparse signal in the test bench

采用传统 K-SVD 算法对采集的信号进行稀疏分解,通过观察图 5(a) 重构信号的时域波形图,故障冲击成分中仍混入部分噪音信号,存在虚假成分。然后对其进行包络分析,虽然能识别出轴承故障的 1 倍频,但周围存在幅值较高的噪声成分,稀疏表示效果不理想。将包络谱图 5(b) 与图 4 进行比较,不仅有效识别出故障特征频率,同时减弱了噪声幅值,运行时间从 0.97 s 缩短到 0.46 s。根据上述分析,验证了本文提出的方法在轴承故障特征提取方面优于传统 K-SVD 算法。同样地,采用相同的算法步骤再次对轴承外圈和滚动体进行分析诊断(具体步骤不再赘述),诊断结果如图 6、图 7 包络谱所示。该算法依旧能较好地提取轴承外圈、滚动体的早期故障特征,有效识别轴承故障类型。

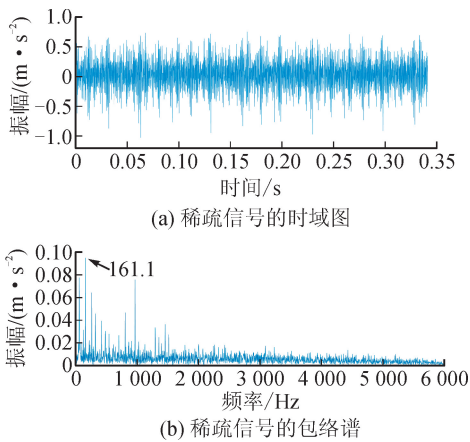


图 5 传统 K-SVD 算法提取结果

Fig. 5 Extraction results by traditional K-SVD algorithm element

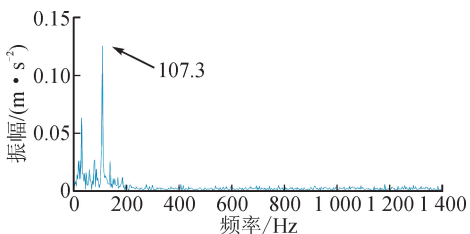


图 6 外圈故障特征提取结果

Fig. 6 Fault feature extraction result of outer ring

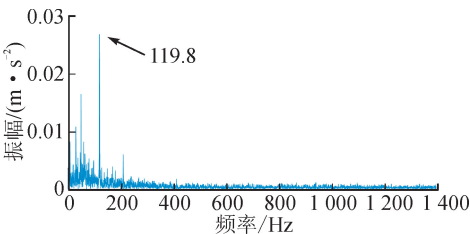


图 7 滚动体故障特征提取结果

Fig. 7 Fault feature extraction result of rolling element

### 3.2 实际工况验证

每台印刷设备上都有大量的轴承,它们是印刷机的关节,是保证设备精准运转的核心零件。本文以 FR400 系列机组式凹版印刷机收料辊上的滚动轴承为研究对象,通过线切割的方式加工直径为 0.4 mm 的内圈、外圈、滚动体的轴承故障。实验测试台主要由 AVANT 数据采集与分析仪、凹版印刷机、Inspiron 7560 移动工作站、EA-YD-186 加速度传感器组成,如图 8 所示。表 2 给出了实验台的具体参数。

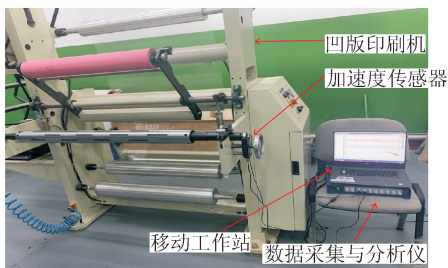


图 8 轴承故障实验台

Fig. 8 Bearing failure test bench

表 2 实验台参数

Tab. 2 Testing parameters

参数	数值
内径/ mm	20
外径/ mm	42
转频/ Hz	30
采样频率/ Hz	12 000
外圈故障频率/ Hz	107.3
内圈故障频率/ Hz	162.7
滚动体故障频率/ Hz	58.2

为了验证本文所提方法的实用性,对模拟实际工况的轴承振动信号进行特征提取。由于实际运行状况复杂,采集的振动信号较微弱,时域图上几乎无法获取与故障相关的周期性冲击特征。对其进行包络分析,故障特征频率淹没在大量的噪声中,依旧无法提取出与轴承故障频率相关的特征值。因而,采用本文所提出的方法。首先,将待分析信号进行 VMD 分解,将分解得到的 10 个模态分量通过定量指标筛选,选择最佳 IMF2 分量。然后,根据采集的振动信号构造初始字典,通过改进的 K-SVD 算法对 IMF2 分量进行字典学习和稀疏编码的迭代更新,得到最终的稀疏重构信号,并对稀疏信号进行包络分析,如图 9 所示,提取出故障频率为 164.1 Hz,噪声幅值在故障频率附近逐渐衰减,与理论计算的内圈故障频率 162.7 Hz 相符,说明轴承内圈出现故障。

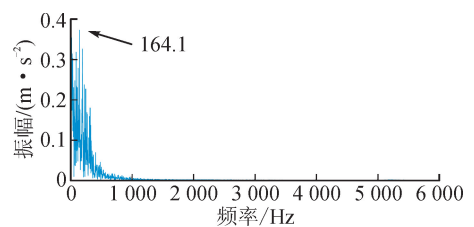


图 9 实测数据稀疏信号的包络谱

Fig. 9 Envelope spectrum of the measured data sparse signal

其中,该算法的迭代次数根据包络谱峭度准则确定为  $I = 10$ ,如图 10 所示。当迭代次数为 10 时,对应峭度最大的包络谱,此时字典更新的收敛性最好,重构误差最小。与传统的 K-SVD 算法进行比较,图 11 中无法提取出与故障特征频率相关的特征值,周围存在幅值较高的噪声成分,稀疏表示效果较差,因此,验证了本文所提出的改进的 K-SVD 字典学习和 VMD 分解的轴承故障特征提取方法的实用性。

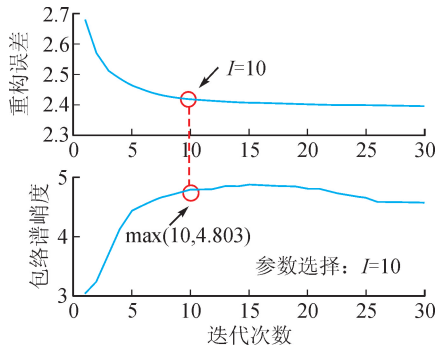


图10 实测信号的重构误差及包络谱峭度随迭代次数的变化趋势

Fig. 10 Variable trend of reconstruction error and kurtosis of envelope spectrum for the measured signal

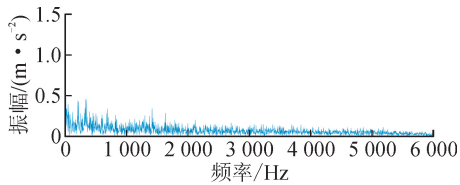


图11 传统 K-SVD 算法的包络谱

Fig. 11 Envelope spectrum for the traditional K-SVD algorithm

## 4 结论

1) 强噪声干扰背景下,旋转机械中轴承的振动信号存在非线性、非平稳的特征,会影响 K-SVD 字典学习,针对此问题,引入 VMD 算法,有效提取与故障特征相关的成分,剔除无关分量,增强 K-SVD 字典学习效果。

2) 传统 K-SVD 中,迭代次数的选择需人为设定,主观性强。本文采用包络谱峭度作为 K-SVD 算法中迭代次数的遴选准则,并且根据原始数据构造与故障冲击成分高度匹配的初始字典,提高了字典学习能力。

3) 通过实验台数据和实测数据两个案例,充分验证了本文所提方法在轴承微弱故障特征提取方面的有效性和实用性。与传统 K-SVD 算法相比,本文算法在稀疏表示效果、故障提取能力和运行时间上均有较大的优势,为机械设备轴承故障诊断提供了新思路。

### 参考文献:

[1] MA R H, DONG X H. Analysis on the symbiosis stability of agricultural equipment manufacturing value network based on Lotka-Volterra[J]. International Journal of Systems Assurance Engineering and Management, 2017, 8(1):499-504.

[2] 杨秀芳,张西宁. 齿轮局部故障振动信号分析及提取方法研究[J]. 西安理工大学学报, 2019, 35(1):28-33.

YANG Xiufang, ZHANG Xi'ning. Study on the analysis and extraction method of gear local fault vibration signal[J]. Journal of Xi'an University of Technology, 2019, 35(1): 28-33.

[3] 刘自然,陈仁权,颜丙生,等. 基于 EWT 和包络谱分析的轴承故障诊断研究[J]. 中国测试, 2018, 44(2):98-102.

LIU Ziran, CHEN Renquan, YAN Bingsheng, et al. Research on bearing fault diagnosis based on EWT and envelope spectrum analysis[J]. China Measurement & Test, 2018, 44(2):98-102.

[4] HUANG N E, SHEN Z, LONG S R, et al. The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis[J]. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 1998, 454: 903-995.

[5] KANG M, KIM J, KIM J M, et al. Reliable fault diagnosis for incipient low-speed bearings using fault feature analysis based on a binary bat algorithm[J]. Information Sciences, 2015, 294: 423-438.

[6] HE P, FAN B C, XU X H, et al. Group K-SVD for the classification of gene expression data[J]. Computers & Electrical Engineering, 2019, 76: 143-153.

[7] ENGAN K, AASE S O, HUSOY J H. Multi-frame compression: theory and design[J]. Signal Processing Amsterdam, 2000, 80 (10): 2121-2140.

[8] ZHAO C, FENG Z P, WEI X K, et al. Sparse classification based on dictionary learning for planet bearing fault identification[J]. Expert Systems with Applications, 2018, 108: 233-245.

[9] YANG M, ZHANG L, YANG J, et al. Metaface learning for sparse representation based face recognition[C]//2010 IEEE International Conference on Image Processing. Sep 26-29, 2010, Hong Kong, IEEE, 2010; 1601-1604.

[10] 王文卿,高钰迪,刘涵,等. 基于低秩稀疏表示的红外与可见光图像序列融合方法[J]. 西安理工大学学报, 2019, 35(3):276-283.

WANG Wenqing, GAO Yudi, LIU Han, et al. Infrared and visible image sequence fusion via low-rank and sparse representation[J]. Journal of Xi'an University of Technology, 2019, 35(3): 276-283.

[11] 周伟力,贺前华,王亚楼,等. 基于自适应逼近残差的稀疏表示语音降噪方法[J]. 电子与信息学报, 2017, 39(2):309-315.

ZHOU Weili, HE Qianhua, WANG Yalou, et al. Adapted stopping residue error based sparse representation for speech denoising[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2017, 39(2):309-315.

[12] ZHANG M, JIANG Z N, FENG K. Research on variational mode decomposition in rolling bearings fault diagnosis of the multistage centrifugal pump[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2017, 93: 460-493.

[13] DRAGOMIRETSKIY K, ZOSSO D. Variational mode decomposition[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2014, 62(3):531-544.

[14] 杨国安. 滚动轴承故障诊断实用技术[M]. 北京:中国石化出版社, 2012.