

DOI:10.19322/j.cnki.issn.1006-4710.2020.04.020

# 分数阶近似熵算法

袁利国<sup>1</sup>, 杨晓婷<sup>1</sup>, 余荣忠<sup>2</sup>

(1. 华南农业大学 数学与信息学院, 广东 广州 510640; 2. 九江学院 理学院, 江西 九江 332005)

**摘要:** 熵是度量时间序列混沌、随机性与复杂性的重要指标。基于分数阶微积分理论及熵理论, 文章首次给出一类分数阶熵算法, 并应用于标准正态分布与泊松分布随机变量。进一步提出分数阶近似熵算法, 它是一个新的熵定义与算法, 将其应用到经典混沌系统——Logistic 系统与 Hénon 系统, 通过与分岔图、李雅普诺夫指数谱作比对, 表明分数阶近似熵算法能很好地度量周期轨道与混沌序列。最后, 给出分数阶近似熵算法的程序代码。

**关键词:** 香农熵; 近似熵; 分数阶近似熵; 混沌

**中图分类号:** O19, N93

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1006-4710(2020)04-0575-06

## Fractional-order approximate entropy algorithm

YUAN Liguol, YANG Xiaoting<sup>1</sup>, YU Rongzhong<sup>2</sup>

(1. College of Mathematics and Informatics, South China Agricultural University, Guangzhou 510640, China;

(2. College of Science, Jiujiang University, Jiujiang 332005, China)

**Abstract:** Entropy is an important index for measuring the chaos, randomness and complexity of time series. Based on the theory of fractional calculus and entropy, a kind of fractional entropy is firstly defined and analyzed, which is applied to the random variables of the standard normal distribution and the Poisson distribution. Furthermore, the fractional-order approximate entropy algorithm is proposed, which is a new definition of and algorithm for entropy. It is successfully applied to the classical chaotic systems—Logistic system and Hénon system. By comparing with the bifurcation diagram and Lyapunov exponent spectrum, the fractional-order approximate entropy algorithm can better measure periodic orbits and chaotic sequences. Finally, the program codes of the fractional-order approximate entropy algorithm are given.

**Key words:** Shannon entropy; approximate entropy; fractional-order approximate entropy; chaos

熵是衡量系统宏观结构中随机性或无序程度的一个量<sup>[1]</sup>, 熵是宏观量, 是系统大量微观粒子集体表现的性态。分析个别微观粒子的熵没有意义。有关熵的定义与算法有很多, 如香农熵、Tsallis 熵、Rényi 熵、近似熵、样本熵、谱熵、Kolmogorov-Sinai 熵等, 都得到了广泛的应用<sup>[1-7]</sup>。香农熵是基础, 其它熵的定义大多是由香农熵引申推广而来。在应用于混沌系统时, 熵可以是系统混沌程度的一种度量, 熵值越大, 系统轨道的随机性与混沌程度越强, 系统表现出来的性态越复杂。

分数阶微积分理论及应用最近三十年发展迅速, 它与整数阶微积分有着同样悠久的历史<sup>[8-11]</sup>。

分数阶导数的定义有很多种, 目前尚未形成统一形式, 其中经典的有 Riemann-Liouville 左侧导数

$${}^{\text{RL}}D_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-\xi)^{n-\alpha-1} f(\xi) d\xi, x \geq a,$$

Caputo 左侧导数<sup>C</sup> $D_a^\alpha f(x) =$

$$\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-\xi)^{n-\alpha-1} \frac{d^n}{d\xi^n} f(\xi) d\xi, x \geq a$$

和 Grünwald-Letnikov 分数阶导数<sup>GL</sup> $D_i^\alpha f(t) =$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \sum_{j=0}^{\lceil \frac{t-t_0}{h} \rceil} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh) \text{ 等等。除了这些定义之}$$

外, 还有 Hadamard 定义、Riesz 定义、Weyl 定义等<sup>[8-10]</sup>, 并且, 一些新的分数阶导数与积分定义还在不断涌现, 这些

收稿日期: 2020-09-28; 网络出版日期: 2020-10-26

网络出版地址: <https://kns.cnki.net/kcms/detail/61.1294.N.20201026.1456.007.html>

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11661046, 11671149); 广州市科技计划资助项目(201707010031)

第一作者: 袁利国, 男, 博士, 副教授, 研究方向为混沌与分岔、分数阶微分方程、最优化与混沌图像加密等。

E-mail: liguoy@scau.edu.cn

定义都有各自的适用范围,各有优势与不足。

混沌、分岔与分形是非线性动力学的三个重要研究方向<sup>[11-16]</sup>,其中对混沌的判定与度量是非常重要的内容。如何刻画一个系统是处于周期状态或混沌轨道?通常先数值模拟系统相图,观察其轨线变化趋势;或分析系统轨道随参数的变化,在参数的临界值处,系统的轨线会产生突变,产生分岔现象,如倍周期分岔。这两种方法都是定性观察,而计算系统的李雅普诺夫指数谱是对其进行定量计算。如果有一个李雅普诺夫指数大于零,且系统有界,则系统是混沌的;如果有多于一个李雅普诺夫指数大于零,则系统是超混沌的;如果李雅普诺夫指数都小于零,则系统的轨道是规则的,如周期轨道、拟周期轨道或最终周期轨道等。

基于香农熵、分数阶微积分理论、近似熵等概念及算法,本文提出两种新的熵定义与算法,即分数阶熵与分数阶近似熵。将这些算法应用于标准正态分布、泊松分布和经典的混沌系统(Logistic 系统与 Hénon 系统),并编写相关程序,与倍周期分岔图及李雅普诺夫指数图作比较,表明分数阶近似熵的结果能很好地印证分岔现象与李雅普诺夫指数谱,能较好地区分系统中的周期轨与混沌轨。

### 1 香农熵与近似熵

香农熵(Shannon entropy)的定义是基于随机变量及其概率。假设  $X$  是随机变量,其概率分布为  $P(X = X_i) = P_i$ (离散型)或  $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$ (连续型)。针对连续型随机变量,区间  $[a, b]$ 可拆分成  $[a, b] = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_n$ ,在每段区间  $I_i$  上计算  $P_i = \int_{I_i} f(x)dx$ ,就对连续型随机变量进行了离散化,则无论离散型或连续型随机变量都可以定义香农熵:

$$H(P) = -c \sum_{i=1}^n P_i \ln P_i \tag{1}$$

通常取  $c=1$ 。由导数定义,有:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -1} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n P_i^{-t} &= \lim_{t \rightarrow -1} \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} P_i^{-t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow -1} \sum_{i=1}^n -P_i^{-t} \ln P_i = \\ &= - \sum_{i=1}^n P_i \ln P_i \end{aligned}$$

因此,式(1)可以改写成导数与极限形式:

$$H(P) = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n P_i^{-t} \tag{2}$$

此处  $\frac{d}{dt}(\cdot)$  是一阶导数<sup>[1-5]</sup>。当概率均等时香农熵最大,即当  $P_i = \frac{1}{n}$  时,最大值为  $\ln n$ 。香农熵具有连续性,概率值的微小变化所带来的熵的变化很小;具有对称性,样本重新排序,不影响熵值;具有极值性,即当  $P_i = \frac{1}{n}$  时,熵值达到最大;具有可加性,即熵值与过程如何被划分无关,可以通过子系统的熵叠加得到。

Pincus 提出近似熵(Approximate entropy)的概念与算法<sup>[4-6]</sup>。给定时间序列  $u(1), u(2), \cdots, u(N)$ ,输入参数  $m$ (整数)和  $r$ (正实数)分别表示嵌入维数与相似容限。在  $R^m$  空间中,构造  $m$  维向量序列  $\mathbf{x}(1), \mathbf{x}(2), \cdots, \mathbf{x}(N-m+1)$ ,其中  $\mathbf{x}(i) = [u(i), u(i+1), \cdots, u(i+m-1)]$ ,  $i=1, 2, \cdots, N-m+1$ 。对某个固定的  $i$ ,计算  $C_i^m(r) = \{\text{使得 } d[\mathbf{x}(i), \mathbf{x}(j)] \leq r \text{ 的所有 } \mathbf{x}(j) \text{ 的个数}\} / (N-m+1)$ ,  $j \in [1, N-m+1]$ ,  $j$  可以等于  $i$ 。对于任意两个向量  $\mathbf{x}(i)$  与  $\mathbf{x}(j)$ ,定义距离  $d[\mathbf{x}(i), \mathbf{x}(j)] = \max_{k=1, 2, \cdots, m} |u(i+k-1) - u(j+k-1)|$ 。现定义  $\Phi^m(r) = \frac{1}{N-m+1} \times \sum_{i=1}^{N-m+1} \ln(C_i^m(r))$ 。当嵌入维数增加至  $m+1$ ,  $i=1, \cdots, N-m$ ,得  $C_i^{m+1}(r) = \frac{1}{N-m} \sum_{j=1}^{N-m} \Theta(r - d[\mathbf{x}(i) - \mathbf{x}(j)])$ ,  $\Phi^{m+1}(r) = \frac{1}{N-m} \sum_{i=1}^{N-m} \ln(C_i^{m+1}(r))$ ,  $\Theta(\cdot)$  为 Heaviside 函数,则近似熵定义为:

$$AppEn = \Phi^m(r) - \Phi^{m+1}(r) \tag{3}$$

其中,  $\frac{1}{N-m}, C_i^{m+1}(r)$  都可类比香农熵中概率  $P_i$  的理解。在实际应用中,通常令参数  $m$  取 2 或 3,  $r$  取 0.1~0.25 倍  $std$ ,其中  $std$  表示轨道的标准差。

### 2 分数阶近似熵算法

现把香农熵式(2)中的导数推广到分数阶导数形式  $H = \lim_{t \rightarrow -1} D_q^t \sum_{i=1}^n p_i^{-1}$ 。分数阶导数定义有很多,合理选取分数阶导数定义及如何应用分数阶导数是关键。这是因为很多分数阶导数在对函数求导时,并不能以显式给出求导结果,而香农熵定义中为指数函数形式,因此,易于求解指数函数的分数阶导数是比较合适的。先介绍如下一类分数阶导数定义,假设  $f(x): R \rightarrow R$  是一个函数,  $\alpha \in R$ ,  $L(\cdot)$  是 L'Hôspital 过程,则  $f(x)$  的分数阶导数为:

$$f^{\alpha}(x) = D_x^{(\alpha)} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} L \left( \frac{f^{\alpha}(x+h) - f^{\alpha}(x)}{(x+h)^{\alpha} - x^{\alpha}} \right) = \frac{d(f^{\alpha}(x+h) - f^{\alpha}(x))}{dh} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{dh}{d((x+h)^{\alpha} - x^{\alpha})} = \frac{f'(x) f^{\alpha-1}(x)}{x^{\alpha-1}} \quad (4)$$

式(4)是先关于  $h$  求导,再令  $h \rightarrow 0$  求极限。基于此分数阶导数, KARCI 提出第一类型的分数阶熵<sup>[1,3]</sup>。

$$H_1 = D_t^{(\alpha)} \sum_{i=1}^n p_i^{-t} = \sum_{i=1}^n |(-p_i)^{\alpha} p_i \ln p_i| \quad (5)$$

$$\text{第二类型的分数阶熵 } H_2 = \sum_{i=1}^n (-p_i)^{\alpha} p_i \ln p_i.$$

定义  $H_2$  有误,如果  $\alpha = \frac{1}{2}$ , 又  $p_i \geq 0$ , 则  $(-p_i)^{\alpha}$  开平方会出现复数。而第一类型分数阶熵  $H_1$  避免了此类情况。定义式(5)在文献[1]中得到应用。当  $\alpha \rightarrow 1$  时,对式(5)求极限有:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} H_1 = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \sum_{i=1}^n |(-p_i)^{\alpha} p_i \ln p_i| = \sum_{i=1}^n |-(p_i)^2 \ln p_i|$$

它并不能退化到香农熵(一阶导数形式)。另一方面,分数阶导数定义式(4)并不能满足  $D_x^{(\alpha)} [f(x) + g(x)] = D_x^{(\alpha)} [f(x)] + D_x^{(\alpha)} [g(x)]$ , 因此  $H_1 = D_t^{(\alpha)} \sum_{i=1}^n p_i^{-t} = \sum_{i=1}^n D_t^{(\alpha)} p_i^{-t} = \sum_{i=1}^n |(-p_i)^{\alpha} p_i \ln p_i|$  错误地利用了分数阶导数式(4)的运算性质。基于上述分析,现给出新的分数阶熵的定义:

$$H^{\alpha}(P) = \lim_{t \rightarrow -1} \sum_{i=1}^n D_t^{(\alpha)} (p_i^{-t}) = \lim_{t \rightarrow -1} \sum_{i=1}^n \frac{-p_i^{-t} \ln(p_i) (p_i^{-t})^{\alpha-1}}{t^{\alpha-1}} = \lim_{t \rightarrow -1} \sum_{i=1}^n \frac{-p_i^{-t} \ln(p_i)}{t^{\alpha-1}} = \lim_{t \rightarrow -1} \sum_{i=1}^n \frac{-p_i^{\alpha} \ln(p_i)}{(-1)^{\alpha-1}} = (-1)^{-\alpha} \sum_{i=1}^n p_i^{\alpha} \ln(p_i) \quad (6)$$

此时,有  $\lim_{\alpha \rightarrow 1} H^{\alpha}(P)$  退化到香农熵。但由于  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $(-1)^{-\alpha}$  可能是一个复数,则把  $H^{\alpha}(P)$  拆分成实部与虚部两部分,即复熵的形式<sup>[7]</sup>。记  $(-1)^{-\alpha} = k_1 + ik_2, k_1, k_2 \in R$ , 则  $H^{\alpha}(P) = k_1 \sum_{i=1}^n p_i^{\alpha} \ln(p_i) +$

$i[k_2 \sum_{i=1}^n p_i^{\alpha} \ln(p_i)]$ 。如果  $k_2 = 0$ , 则  $H^{\alpha}(P)$  是实数形式。在实际应用与数值计算中,分数阶熵采用如下形式:

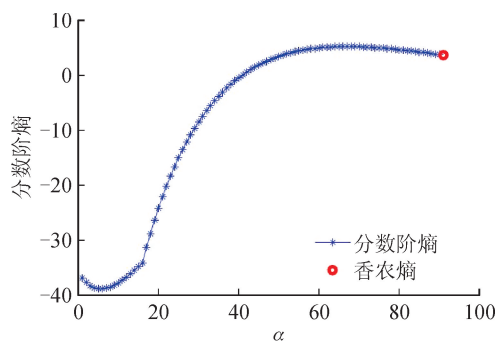
$$H^{\alpha}(P) = \max \left\{ k_1 \sum_{i=1}^n p_i^{\alpha} \ln(p_i), k_2 \sum_{i=1}^n p_i^{\alpha} \ln(p_i) \right\} \quad (7)$$

由  $(-1)^{-\alpha}$  得到  $k_1, k_2$  相当于香农熵中的  $c$ , 其

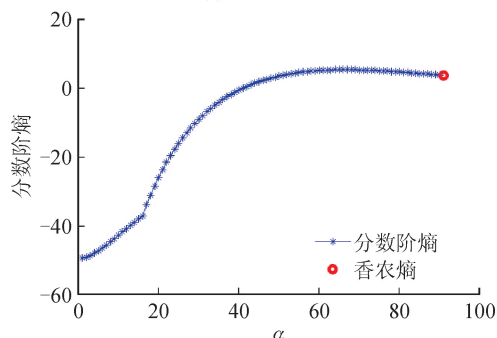
取值不影响最终判定结果。

现计算一些常见概率分布的香农熵与分数阶熵,并作对比分析。连续型随机变量标准正态分布的概率密度函数为:  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, -\infty < x < +\infty$ 。现选取  $I = \{-5 \leq x \leq 5\}$ , 分割成 30 段, 香农熵为 3.590 248 138 813 80 ( $\alpha=1$  时的情形), 此时受分割段数的影响。当阶数  $\alpha \rightarrow 1$  时, 取  $\alpha = 0.1 : 0.01 : 0.99998$ , 分数阶熵随阶数  $\alpha$  的变化情况如图 1(a) 所示, 分数阶熵趋于香农熵。离散型随机变量泊松分布的分布律  $P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k=0, 1, \dots$ 。

取  $k=0, 1, \dots, 40$ , 则其香农熵为 3.695 333 411 297 13 ( $\alpha=1$  时的情形)。当阶数  $\alpha \rightarrow 1$  时, 取  $\alpha = 0.1 : 0.01 : 0.99998$ , 分数阶熵随阶数  $\alpha$  的变化情况如图 1(b) 所示, 分数阶熵趋于香农熵。泊松分布的极限分布是正态分布, 即  $np = \lambda$ , 当  $n$  很大时, 可以近似相等, 因此二者的熵也近似相等。



(a) 标准正态分布



(b) 泊松分布

图 1 分数阶熵趋于香农熵

Fig. 1 Fractional-order entropy tending to Shannon entropy

通过分数阶熵与近似熵的结合,可以得到熵的新定义、新观点以及新的应用。现提出分数阶近似熵(Fractional-order Approximate Entropy, 简记 FraAppEn)的定义与算法。给定时间序列  $u(1), u(2), \dots, u(N)$ , 两个输入参数  $m$  (整数) 和  $r$  (正实数) 分别表示比较数据的嵌入维数与相似容限。在  $R^m$  空间中, 构造  $m$  维向量序列  $\mathbf{x}(1), \mathbf{x}(2), \dots, \mathbf{x}(N-1)$

$m+1)$ ,其中:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(i) &= [u(i), u(i+1), \dots, u(i+m-1)], \\ i &= 1, 2, \dots, N-m+1 \end{aligned} \tag{8}$$

对式(8)中某个固定的  $i$ , 计算:

$$C_i^m(r) = \frac{1}{N-m+1} \sum_{j=1}^{N-m+1} \Theta(r-d[\mathbf{x}(i)-\mathbf{x}(j)]) \tag{9}$$

其中,  $j \in [1, N-m+1]$ ,  $j$  可以等于  $i$ ,  $i=1, 2, \dots, N-m+1$ . 定义

$$\Phi^m(r) = \sum_{i=1}^{N-m+1} |(-C_i^m(r))^\alpha C_i^m(r) \ln C_i^m(r)| \tag{10}$$

当嵌入维数增加至  $m+1$ ,  $i=1, \dots, N-m$ , 重复式(9)与式(10), 得:

$$\begin{aligned} C_i^{m+1}(r) &= \frac{1}{N-m} \sum_{j=1}^{N-m} \Theta(r-d[\mathbf{x}(i)-\mathbf{x}(j)]), \\ \Phi^{m+1}(r) &= \sum_{i=1}^{N-m} |(-C_i^{m+1}(r))^\alpha C_i^{m+1}(r) \ln C_i^{m+1}(r)|, \end{aligned}$$

则定义分数阶近似熵为:

$$FraAppEn = \Phi^m(r) - \Phi^{m+1}(r) \tag{11}$$

当  $\alpha \rightarrow 0$  时, 则分数阶近似熵退化为

$$\sum_{i=1}^{N-m+1} |C_i^m(r) \ln C_i^m(r)| - \sum_{i=1}^{N-m} |C_i^{m+1}(r) \ln C_i^{m+1}(r)|,$$

它类似于近似熵的定义。在实际应用中, 参照前面分数阶熵的分析, 分数阶近似熵采用如下形式:

$$FraAppEn = \max\{\text{real}[\Phi^m(r) - \Phi^{m+1}(r)], \text{imag}[\Phi^m(r) - \Phi^{m+1}(r)]\} \tag{12}$$

其中,  $\text{real}(\cdot)$ 、 $\text{imag}(\cdot)$  分别表示求解实部与虚部。大多数熵的定义是基于香农熵思想推广得到。由于分数阶近似熵是数据维数发生改变时, 时间序列中产生新模式概率的大小, 只是从统计角度区分时间过程的复杂性, 不需要重构吸引子, 只需较短数据即可, 因此, 取式(12)中实部与虚部的最大值来刻画其改变的概率幅度是可行的。此思想类似于用最大李雅普诺夫指数刻画混沌, 而不需要采用整个李雅普诺夫指数谱。

3 应用

现把分数阶近似熵式(12)应用于经典的混沌系统(Logistic 系统与 Hénon 系统), 并与分岔图、李雅普诺夫指数图作比较, 得到一致的可靠结论。

1976 年数学生态学家 R. May 提出 Logistic 系统<sup>[15]</sup>:

$$x_{n+1} = 1 - u x_n^2 \tag{13}$$

其中,  $x_n \in (-1, 1)$ ,  $u \in (0, 2]$ 。式(13)是由倍周期分岔产生混沌现象的经典一维离散系统。

李雅普诺夫指数  $\lambda$  可度量混沌, 如果  $\lambda > 0$ , 则 Logistic 系统轨道是混沌的; 如果  $\lambda < 0$ , 则 Logistic 系统轨道是周期的; 如果  $\lambda = 0$ , 则 Logistic 系统可能发生分岔。式(13)的倍周期分岔图、李雅普诺夫指数与分数阶近似熵如图 2 所示。其中参数  $u \in (0, 2]$ , 计算分数阶近似熵时, 参数  $u$  的变化步长为  $h=0.005$ 。

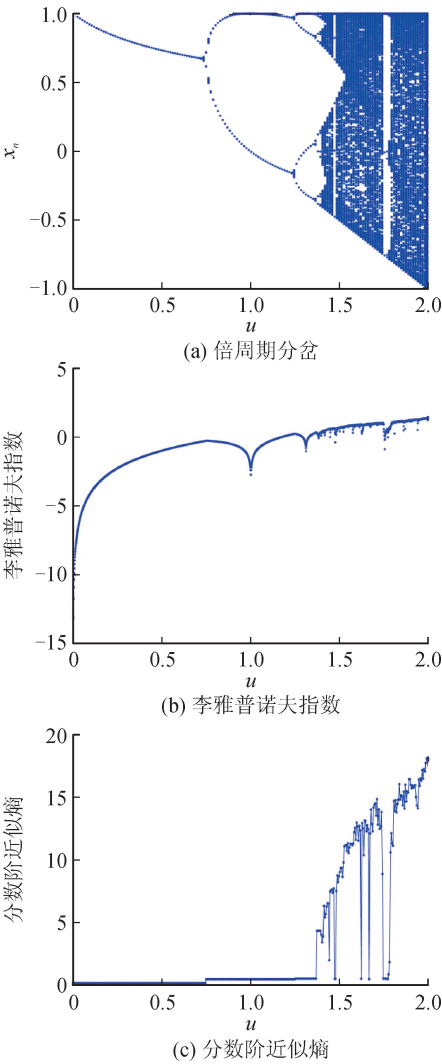


图 2 Logistic 系统的复杂动力学  
Fig. 2 Complex dynamics of logistic system

二维离散 Hénon 系统<sup>[16]</sup>:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - a x_n^2 + y_n \\ y_{n+1} = b x_n \end{cases} \tag{14}$$

其中,  $x_n \in [0, 1]$ ,  $y_n \in [0, 1]$ 。雅可比矩阵  $\mathbf{J} =$

$$\begin{bmatrix} -2ax_n & 1 \\ b & 0 \end{bmatrix}, \text{ 当 } |\mathbf{J}| = b = \pm 1 \text{ 时, Hénon 系统是保}$$

守的; 当  $|b| > 1$  时, 系统是发散的; 当  $|b| < 1$  时, 系统是耗散的。若固定参数  $b=0.3$ , 可得系统随参数  $a \in [0, 1.4]$  变化的分岔图、李雅普诺夫指数谱和对应的分数阶近似熵, 如图 3 所示。分数阶近似熵计

算过程中,参数  $a$  的变化步长为  $h=0.007$ 。

分数阶近似熵的结果基本印证了李雅普诺夫指数图与倍周期分岔图,如图 2、图 3 所示。如果是周期轨,则李雅普诺夫指数小于零,分数阶近似熵近似为零;当轨道是混沌时,李雅普诺夫指数大于零,分数阶近似熵大于零。因此,在判定周期运动与混沌运动时,分数阶近似熵式(12)可以提供较好的定量分析。

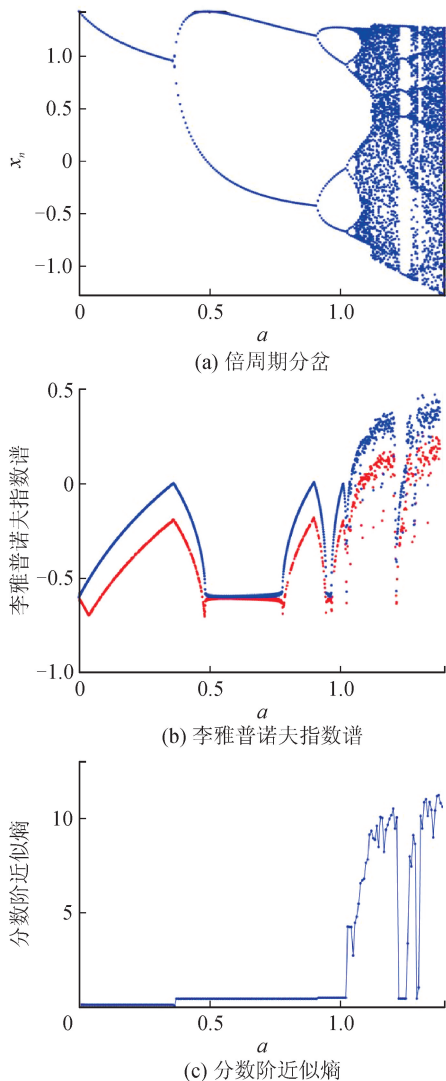


图3 Hénon系统的复杂动力学

Fig.3 Complex dynamics of Hénon system

## 4 结 语

本文给出了分数阶熵与分数阶近似熵的定义与算法,并分别成功应用于标准正态分布、泊松分布、Logistic系统和Hénon系统,其对随机变量与混沌轨道具有很好的判定效果。部分程序(Matlab代码)已在附录中给出。分数阶近似熵中存在  $(-1)^a$ ,从而可能导致出现复数情形,本文采用最

值函数处理它,将来有待进一步改进本文算法,设计更合理的分数阶近似熵,且分数阶微积分理论与各类其它熵的结合是未来值得研究的方向。

## 参考文献:

- [1] KARCI A. Fractional order entropy: new perspectives [J]. Optik, 2016, 127(20): 9172-9177.
- [2] SHANNON C E. A mathematical theory of communication[J]. The Bell System Technical Journal, 1948, 27(3): 379-423.
- [3] UBRIACO M R. Entropies based on fractional calculus [J]. Physics Letters A, 2009, 373(30): 2516-2519.
- [4] PINCUS S M. Approximate entropy as a measure of system complexity [J]. Proceedings of the National Academy of Sciences, 1991, 88 (6): 2297-2301.
- [5] PINCUS S. Approximate entropy (ApEn) as a complexity measure[J]. Chaos, 1995, 5(1): 110-117.
- [6] 杨福生, 廖旺才. 近似熵: 一种适用于短数据的复杂性度量[J]. 中国医疗器械杂志, 1997, 21(5): 283-286.  
YANG Fusheng, LIAO Wangcai. Approximate entropy: a complexity measure suitable for short data[J]. Chinese Journal of Medical Instrumentation, 1997, 21 (5): 283-286.
- [7] 顾昌耀, 邱苑华. 复熵及其在 Bayes 决策中的应用[J]. 控制与决策, 1991, 6(4): 253-259.  
GU Changyao, QIU Wanhua. Complex entropy and its application in Bayes decision analysis[J]. Control and Decision, 1991, 6(4): 253-259.
- [8] MILLER K S, ROSS B. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations[M]. New York: John Wiley & Sons, Inc, 1993.
- [9] OLDHAM K B, SPANIER J. The fractional calculus: theory and application of differentiation and integration to arbitrary order[M]. New York: Academic Press, 1974.
- [10] DE OLIVEIRA E C, TENREIRO MACHADO J A. A review of definitions for fractional derivatives and integral [J]. Mathematical Problems in Engineering, 2014, 2014: 238459.
- [11] CHEN Liping, YIN Hao, YUAN Liguang, et al. A novel color image encryption algorithm based on a fractional-order discrete chaotic neural network and DNA sequence operations[J]. Frontiers of Information Technology & Electronic Engineering, 2020, 21 (6): 866-879.
- [12] 吕金虎. 混沌时间序列分析及其应用[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2002.
- [13] 姚俊良, 孙郁哲, 任海鹏. 混沌光纤通信研究进展与展望[J]. 西安理工大学学报, 2018, 34(2): 127-133, 124.  
YAO Junliang, SUN Yuzhe, REN Haipeng. Chaotic

optical fiber communication system; a survey and prospect[J]. Journal of Xi'an University of Technology, 2018, 34(2):127-133,124.

[14] 张明霞,冯志刚. 隐变量分形插值曲线的计盒维数[J]. 西安理工大学学报, 2019, 35(4):467-471.

ZHANG Mingxia, FENG Zhigang. Box counting dimension of hidden variable fractal interpolation curve [J]. Journal of Xi'an University of Technology, 2019, 35(4):467-471.

[15] LI T Y, YORKE J A. Period three implies chaos[J]. American Mathematical Monthly, 1975, 82 (10): 985-992.

[16] BENEDICKS M, LENNART C. The dynamics of the Hénon map [J]. Annals of Mathematics, 1991, 133 (1): 73-169.

```
附-Logistic 系统的分数阶近似熵(Matlab 代码)
clear all;clc;close all;tot=400;u=linspace(0,2,tot);
for k=1:tot
    x0=0.618; n=1;%Logistic 系统初始值
    for p=1:500
        x(n)=1-u(k)*x0*x0;x0=x(n);n=n+1;%迭代
    end
    x=x(200:end);%舍掉暂态,保留吸引子数据
entropy(k)=Fracapproximatentropy(x);
end%调用子函数
z=max(real(entropy),imag(entropy));plot(u,z,'b.-');
axis([0,2.01,-2,20]);%取最大值,并输出
xlabel('\itu','FontName','Times New Roman','FontSize',
20,'FontWeight','bold');
ylabel('分数阶近似熵','FontName','Times New Roman',
FontSize,20,'FontWeight','bold');
set(gca,'linewidth',2,'FontSize',20);%设置图形坐标
%%%%%%需调用子函数%%%%%%%%
function approx=Fracapproximatentropy(u)
m=2;r=0.1;N=length(u);a=0.8;Totalnum=N-m+1;
X=zeros(Totalnum,m);sum=0;%初始值设置
for i=1:Totalnum
    for j=1:m
        X(i,j)=u(i+j-1);
    end
end
end
```

```
for k=1:Totalnum
    S=0;%计数的初始值
    for j=1:Totalnum
        distant=zeros(m,1);
        for L=1:m
            distant(L,1)=abs(X(k,L)-X(j,L));%计算距离
        end
        d=max(distant);
        if d<=r%判定
            S=S+1;%累积计数
        end
    end
    C=(-1)^(-a)*(S/Totalnum)^a*log(S/Totalnum);
    sum=sum+C;%计算公式的运用
end
QM1=sum;m=m+1;Totalnum=N-m+1;
X=zeros(Totalnum,m);sum=0;%计数
for i=1:Totalnum
    for j=1:m
        X(i,j)=u(i+j-1);
    end
end
for k=1:Totalnum
    S=0;%计数的初始值
    for j=1:Totalnum
        distant=zeros(m,1);
        for L=1:m
            distant(L,1)=abs(X(k,L)-X(j,L));
        end
        d=max(distant);
        if d<=r
            S=S+1;%累积计数
        end
    end
    %计算公式的运用
    C=(-1)^(-a)*(S/Totalnum)^a*log(S/Totalnum);
    sum=sum+C;%求和
end
QM2=sum;approx=QM1-QM2;%输出结果
```

(责任编辑 周 蓓)