

DOI:10.19322/j.cnki.issn.1006-4710.2021.03.009

# 非均匀张力作用下斜支承运动薄膜的振动特性研究

邵明月, 王 静, 武吉梅, 庆佳娟

(西安理工大学 印刷包装与数字媒体学院, 陕西 西安 710054)

**摘要:** 基于陕西北人 B624 卷筒纸印刷机上运动薄膜的运动稳定性问题, 对非均匀张力作用下斜支承运动薄膜的横向振动特性进行研究。基于 D'Alembert 原理以及直角坐标系与斜坐标系的转化, 得到斜坐标系中非均匀张力作用下斜支承运动薄膜的运动微分方程。采用微分求积法对振动微分方程进行离散得到运动薄膜的复特征值方程, 得到非均匀张力系数、斜支承角度变化时无量纲速度与无量纲复频率之间的关系曲线, 分析各参数对系统稳定性的影响并得到了不同参数下运动薄膜发散失稳的临界速度。

**关键词:** 横向振动特性; 非均匀张力; 斜支承; 运动薄膜

**中图分类号:** O321

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1006-4710(2021)03-0367-06

## Vibration characteristics of a moving membrane on oblique supports subjected to non-uniform tension

SHAO Mingyue, WANG Jing, WU Jimei, QING Jiajuan

(Faculty of Printing, Packaging Engineering and Digital Media Technology, Xi'an University of Technology, Xi'an 710054, China)

**Abstract:** Considering the motion stability of moving membrane on the Shaanxi beiren B624 web press, the transverse vibration characteristics of moving membrane on oblique supports subjected to non-uniform tension are studied. Based on d'Alembert's principle and the transformation between rectangular coordinate system and oblique coordinate system, the differential equation to the motion of the moving membrane on oblique supports subjected to non-uniform tension is obtained. The differential quadrature method is used to discretize the differential equation, with the complex eigenvalue equation of the moving membrane obtained. The relationship curve between the dimensionless speed and the dimensionless complex frequency is obtained with the different non-uniform tension coefficient and the angle of the oblique support. The influence of the various parameters on the stability is analyzed, with the critical speed of the divergent instability of the moving membrane under different parameters obtained.

**Key words:** transverse vibration characteristics; non-uniform tension; oblique supports; moving membrane

薄膜作为一种常见的承印材料在柔性电子印刷及卷到卷制造中得到了广泛应用。在传输过程中薄膜由多个牵引辊以及导向辊支承, 当薄膜传输方向需要改变时通常采用斜支承辊, 斜支承辊的支承作用以及辊与辊之间的安装误差所引起的张力不均情

况<sup>[1]</sup>都会改变运动薄膜的振动特性, 导致印刷过程中产生套印不准等故障, 引起较大的印刷误差。因此, 研究非均匀张力作用下斜支承运动薄膜的振动特性对优化印刷设备, 提高印刷质量具有重要意义。

目前, 已有部分学者分别对非均匀张力作用下

**收稿日期:** 2020-06-25; **网络出版日期:** 2021-01-06

**网络出版地址:** <https://kns.cnki.net/kcms/detail/61.1294.N.20210105.1753.002.html>

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(52075435); 陕西省自然科学基金资助项目(2021JQ-480); 陕西省教育厅自然科学基金专项资助项目(21JK0805)

**第一作者:** 邵明月, 女, 讲师, 博士, 研究方向为机械结构动力学。E-mail: shaomingyue\_xaut@163.com

**通信作者:** 武吉梅, 女, 博士, 教授, 博导, 研究方向为机械结构动力学及印刷设备动态特性与仿真。E-mail: wujimei@xaut.edu.cn

运动材料的振动问题及具有支承的轴向运动系统进行研究。王砚等<sup>[1-2]</sup>分别基于解析法和微分求积法对非均匀张力作用下的运动薄膜稳定性进行研究。Banichuk 等<sup>[3]</sup>的研究表明较小的张力不均匀性会对薄膜的发散形式产生较大影响。Nguyen 和 Hong<sup>[4]</sup>在考虑薄膜非均匀张力的基础上提出了一种用于控制轴向运动薄膜系统振动的新颖算法。Ma 等<sup>[5]</sup>对张力呈抛物线分布的轴向运动薄膜横向振动稳定性进行研究,结果表明较小的非均匀张力就会对薄膜的振型有影响。武吉梅等<sup>[6-7]</sup>采用次最优控制法对非均匀张力作用下的运动薄膜振动进行控制并对中间支承运动薄膜振动特性进行研究。马亮<sup>[8]</sup>考虑了柔性基板非均匀张力以及中间弹性支承影响,对柔性基板卷到卷输送中横向振动特性、振动控制及应用进行分析,结果表明变张力系数对基板内应力分布有较大影响。Liew 等<sup>[9]</sup>在考虑多种边界条件情况下研究了带有内部斜支承矩形板的自由振动。Lai 等<sup>[10]</sup>将 DSC-Element 法应用于斜板的自由振动分析,验证了 DSC-Element 法的有效性并得到具有混合边界条件斜板的频率解。Ketabdari 等<sup>[11]</sup>通过参数研究,分析不同边界条件、偏斜角、非均匀性因子及变弹性基础刚度对斜板自由振动的影响。Parida<sup>[12]</sup>和 Ramu<sup>[13]</sup>分别对功能梯度材料斜板的振动特性进行研究。郭旭侠和薛晓飞<sup>[14]</sup>基于微分求积法对热弹耦合运动斜板的振动特性进行研究。Kuma<sup>[15]</sup>等应用有限元法对斜夹层板的自由振动进行研究。胡寒和聂国隽<sup>[16]</sup>研究了变角度纤维复合材料层合斜板的颤振,采用 Ritz 法得到了层合板的自振频率和颤振不稳定的临界速度。

综上所述,目前的研究表明考虑斜支承影响的研究对象多为板,未曾见到考虑斜支承对运动薄膜稳定性影响的研究。本文综合考虑了非均匀张力以及斜支承对运动薄膜振动特性的影响,对其进行研究。本文通过直角坐标系与斜坐标系的转化,建立斜坐标系中非均匀张力作用下斜支承运动薄膜的运动微分方程,并采用微分求积法求解得到运动薄膜的无量纲复频率,分析变张力系数以及斜支承角度对运动薄膜横向振动的影响。

### 1 建立运动薄膜运动微分方程

图 1 为非均匀张力作用下斜支承运动薄膜的力学模型,斜坐标系  $o\xi\eta$  约定如图,取斜支承辊所在方向为  $\eta$  轴方向,薄膜运动方向为  $\xi$  轴正向,运动速度为  $v$ ,  $\theta$  为斜支承辊与  $\xi$  轴夹角,薄膜面密度为  $\rho$ ,  $a$  为薄膜的长度,  $b$  为宽度,厚度为  $h$ ,在  $x$  方向与  $y$

方向上单位长度薄膜所承受的张力分别为  $T_x$  和  $T_y$ ,  $\bar{w}(x, y, t)$  为其横向振动位移。

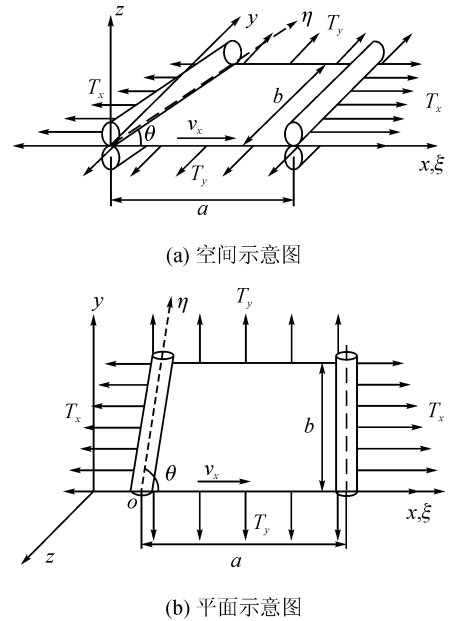


图 1 非均匀张力下斜支承运动薄膜力学模型  
Fig. 1 Mechanical model of a moving membrane on oblique supports subjected to non-uniform tension

$T_x$  沿  $y$  方向的变化规律为:

$$T_x = T_0(1 + \beta \frac{y}{b}) \tag{1}$$

式中:  $\beta$  为非均匀张力系数。

令薄膜在  $z$  轴方向所受的外力为  $F(x, y, t)$ , 由 d'Alembert 原理可知当非自由质点受到约束时,其主动力  $F$  以及约束力  $F_N$ , 与虚加的惯性力  $F_1 = -ma$  之和为零,即  $F + F_N + F_1 = 0$ , 由此将动力学问题转化为静力学问题进行分析<sup>[17]</sup>。则基于 d'Alembert 原理得到运动薄膜的横向振动微分方程为:

$$\rho(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial t} + v^2 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2}) - T_0(1 + \beta \frac{y}{b}) \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} - T_y \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} = F(x, y, t) \tag{2}$$

坐标转换函数为:

$$\xi = x - y \cot \theta, \quad \eta = y \csc \theta \tag{3}$$

令  $F(x, y, t) = 0$ , 将式(3)代入式(2)得到斜坐标下的运动薄膜横向振动微分方程为:

$$\rho(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t \partial \xi} + v^2 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi^2}) - [T_0(1 + \beta \frac{\eta \sin \theta}{b}) + T_y \cot^2 \theta] \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi^2} + 2T_y \cot \theta \csc \theta \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi \partial \eta} - T_y \csc^2 \theta \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \eta^2} = 0 \tag{4}$$

引入下列无量纲量:

$$\begin{cases} \xi^* = \frac{\xi}{a}, \eta^* = \frac{\eta}{b}, W^* = \frac{\bar{w}}{h}, \\ c = v \sqrt{\frac{\rho}{T_0 + T_y \cot^2 \theta}}, \\ r = \frac{a}{b}, \lambda = \frac{T_y}{T_0}, \tau = t \sqrt{\frac{T_0 + T_y \cot^2 \theta}{\rho a^2}} \end{cases} \quad (5)$$

式中:  $c$  为无量纲速度;  $r$  为长宽比;  $\lambda$  表示长度方向与宽度方向的张力比;  $\tau$  表示无量纲时间。

得到无量纲方程为:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 W^*}{\partial \tau^2} + 2c \frac{\partial^2 W^*}{\partial \tau \partial \xi^*} + (c^2 - 1) \frac{\partial^2 W^*}{\partial \xi^{*2}} - \\ & \frac{\beta \eta^* \sin \theta}{1 + \lambda \cot^2 \theta} \frac{\partial^2 W^*}{\partial \xi^{*2}} - \frac{\lambda r^2}{\sin^2 \theta + \lambda \cos^2 \theta} \frac{\partial^2 W^*}{\partial \eta^{*2}} + \\ & \frac{2\lambda r \cos \theta}{\sin^2 \theta + \lambda \cos^2 \theta} \frac{\partial^2 W^*}{\partial \xi^* \partial \eta^*} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

设方程(6)的解为:

$$W^*(\xi^*, \eta^*, \tau) = W(\xi^*, \eta^*) e^{I\omega\tau} \quad (7)$$

式中:  $I = \sqrt{-1}$ ;  $\omega$  为系统无量纲复频率。

将式(7)代入式(6),得到非均匀张力作用下斜支承运动薄膜的运动微分方程为:

$$\begin{aligned} & (c^2 - 1) \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^{*2}} + 2c\omega I \frac{\partial W}{\partial \xi^*} - \\ & \frac{\beta \eta^* \sin \theta}{1 + \lambda \cot^2 \theta} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^{*2}} - \frac{\lambda r^2}{\sin^2 \theta + \lambda \cos^2 \theta} \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^{*2}} + \\ & \frac{2\lambda r \cos \theta}{\sin^2 \theta + \lambda \cos^2 \theta} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^* \partial \eta^*} - \omega^2 W = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

薄膜四边简支边界条件为:

$$\begin{cases} W(0, \eta^*) = 0, W(1, \eta^*) = 0 \\ W(\xi^*, 0) = 0, W(\xi^*, 1) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

## 2 离散得到系统复特征值方程

应用微分求积法对所得薄膜运动方程(8)求解,将薄膜区域划分为  $N \times N$  ( $N = 15$ ) 个节点,应用  $\delta$  法将四边简支边界划分为:

$$\begin{cases} \xi_1^* = 0, \xi_2^* = \delta, \xi_{N-1}^* = 1 - \delta, \xi_N^* = 1, \\ \xi_i^* = \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos \frac{(i-1)\pi}{N-1} \right], (i = 3, 4, \dots, N-2) \\ \eta_1^* = 0, \eta_2^* = \delta, \eta_{N-1}^* = 1 - \delta, \eta_N^* = 1, \\ \eta_j^* = \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos \frac{(j-1)\pi}{N-1} \right], (j = 3, 4, \dots, N-2) \end{cases} \quad (10)$$

函数各阶偏导数值为:

$$\begin{aligned} K_{ij} = & (c^2 - 1 - \frac{\beta \eta^* \sin \theta}{1 + \lambda \cot^2 \theta}) \sum_{k=1}^N A_{ik}^{[2]} W_{kj} - \frac{\lambda r^2}{\sin^2 \theta + \lambda \cos^2 \theta} \sum_{k=1}^N B_{jk}^{[2]} W_{ik} + \\ & \frac{2\lambda r \cos \theta}{\sin^2 \theta + \lambda \cos^2 \theta} \sum_{k=1}^N A_{ik}^{[1]} \sum_{k=1}^N B_{jk}^{[1]} W_{ik} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial W^*}{\partial \xi^*} = \sum_{k=1}^N A_{ik}^{[1]} W^*(\xi_i^*, \eta_j^*, \tau) \\ \frac{\partial^2 W^*}{\partial \xi^{*2}} = \sum_{k=1}^N A_{ik}^{[2]} W^*(\xi_i^*, \eta_j^*, \tau) \\ \frac{\partial W^*}{\partial \eta^*} = \sum_{m=1}^N B_{jm}^{[1]} W^*(\xi_i^*, \eta_j^*, \tau) \\ \frac{\partial^2 W^*}{\partial \eta^{*2}} = \sum_{m=1}^N B_{jm}^{[2]} W^*(\xi_i^*, \eta_j^*, \tau) \end{cases} \quad (11)$$

由 Lagrange 插值公式得到一阶权系数为:

$$A_{ij}^{[1]} = \begin{cases} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i, j}}^N (x_i - x_k) / \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N (x_j - x_k) & (i \neq j) \\ \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \frac{1}{x_i - x_k} & (i = j) \end{cases} \quad (12)$$

由此得到各阶权系数为:

$$A_{ij}^{[k]} = \begin{cases} k \left[ l_i^{[k-1]}(x_i) l'_j(x_i) - \frac{l_i^{[k-1]}(x_i)}{x_i - x_j} \right] & (i \neq j) \\ - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^N l_m^{[k]}(x_i) & (i = j) \end{cases} \quad (13)$$

根据微分求积法得到运动薄膜的复特征值方程为:

$$\begin{aligned} & (c^2 - 1 - \frac{\beta \eta^* \sin \theta}{1 + \lambda \cot^2 \theta}) \sum_{k=1}^N A_{ik}^{[2]} W_{kj} + \\ & 2c\omega I \sum_{k=1}^N A_{ik}^{[1]} W_{kj} - \frac{\lambda r^2}{\sin^2 \theta + \lambda \cos^2 \theta} \sum_{k=1}^N B_{jk}^{[2]} W_{ik} + \\ & \frac{2\lambda r \cos \theta}{\sin^2 \theta + \lambda \cos^2 \theta} \sum_{k=1}^N A_{ik}^{[1]} \sum_{k=1}^N B_{jk}^{[1]} W_{ik} - \omega^2 W_{ij} = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

根据微分求积法可将边界条件离散为:

$$\begin{cases} W_{1j} = W_{Nj} = 0 & (j = 1, 2, \dots, N) \\ W_{i1} = W_{iN} = 0 & (i = 1, 2, \dots, N) \end{cases} \quad (15)$$

合并方程(14)与(15)得到系统特征方程为:

$$|\omega^2 \mathbf{R} + \omega \mathbf{G} + \mathbf{K}| = 0 \quad (16)$$

式中:  $\mathbf{R} = [-W_{ij}]$ ;  $\mathbf{G} = [G_{ij}]$ ,  $G_{ij} = 2cI \sum_{k=1}^N A_{ik}^{[1]} W_{kj}$ ;  $\mathbf{K} = [K_{ij}]$ , 其中  $K_{ij}$  为:

### 3 数值分析

本文以陕西北人 B624 卷筒纸印刷机的基本参数为例,对变张力作用下斜支承运动薄膜进行横向振动特性的研究,取薄膜张力  $T_0 = 90 \text{ N/m}$ ,  $T_y = 90 \text{ N/m}$ , 薄膜面密度  $\rho = 0.12 \text{ kg/m}^2$ 。

当  $\beta = 0, \theta = \pi/2$  时,非均匀张力作用下斜支承运动薄膜的振动方程退化为均匀张力作用下直辊支承运动薄膜的振动方程。取无量纲速度  $c = 0.164$ , 张力比  $\lambda = 0.2$ , 长宽比分别为  $r = 1$  和  $r = 2$ , 计算运动薄膜振动无量纲复频率,将本文解与解析解<sup>[18]</sup>比较,见表 1。取无量纲速度  $c = 0.16$ , 长宽比  $r = 1.8$ , 张力比分别为  $\lambda = 0.1$  和  $\lambda = 0.5$ , 计算运动薄膜振动无量纲复频率,将本文解与解析解<sup>[18]</sup>比较,见表 2。

表 1 无量纲频率本文解与解析解<sup>[18]</sup>对比

( $c = 0.164, \lambda = 0.2$ )

Tab.1 Comparing the solutions of dimensionless frequency in this paper and the analytical solution

( $c = 0.164, \lambda = 0.2$ )

长宽比 $r$	无量纲频率	本文解	解析解
1.0	1	3.356 0	3.356 6
	2	4.125 9	4.126 6
	3	6.268 7	6.269 0
2.0	1	4.126 1	4.126 6
	2	6.330 1	6.330 8
	3	8.252 9	8.253 3

表 2 无量纲频率本文解与解析解<sup>[18]</sup>对比

( $c = 0.16, r = 1.8$ )

Tab.2 Comparing the solutions of dimensionless frequency in this paper and the analytical solution

( $c = 0.16, r = 1.8$ )

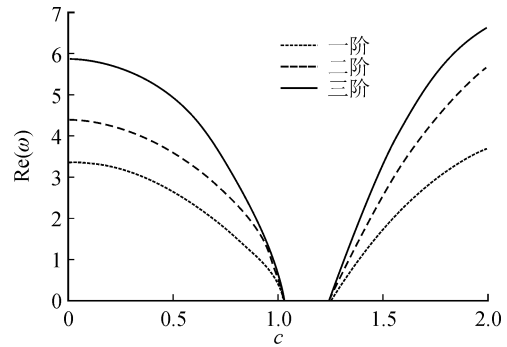
张力比 $\lambda$	无量纲频率	本文解	解析解
0.1	1	3.533 6	3.533 6
	2	4.672 6	4.672 7
	3	7.067 5	7.067 3
0.5	1	4.995 0	4.995 0
	2	7.284 7	7.284 4
	3	9.990 5	9.990 0

由表 1 和表 2 可知,采用微分求积法求得的频率解与解析解有很好的-致性,且精度很高,表明使用该方法研究非均匀张力作用下斜支承运动薄膜的振动特性可行有效。

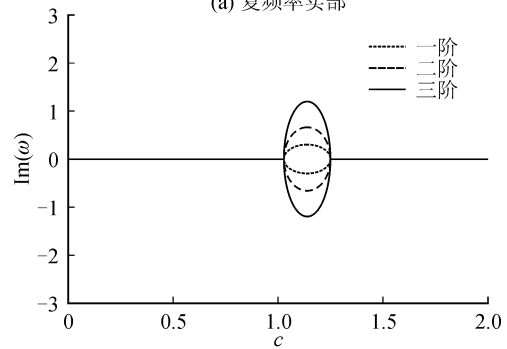
#### 3.1 非均匀张力系数对运动薄膜振动特性影响

图 2,图 3 和图 4 为斜支承角度  $\theta = \pi/3$ , 张力

比  $\lambda = 0.3$ , 长宽比  $r = 0.5$ , 非均匀张力系数分别为  $\beta = 0.1, \beta = 0.4$  和  $\beta = 0.8$  时运动薄膜无量纲复频率与无量纲速度之间的关系曲线。

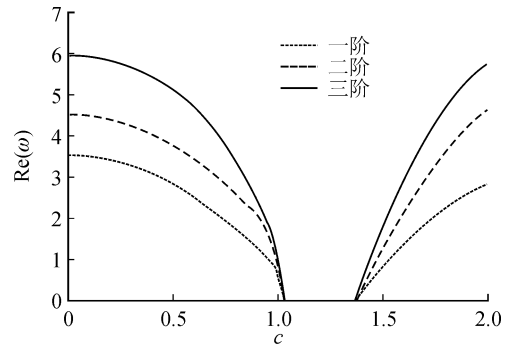


(a) 复频率实部

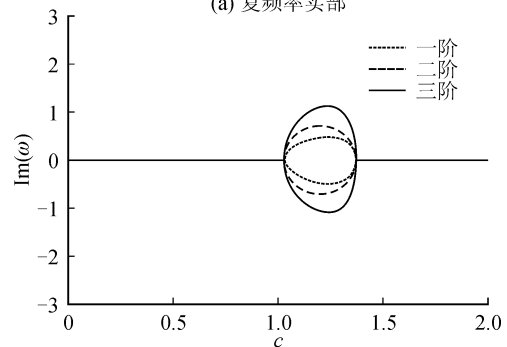


(b) 复频率虚部

图 2 无量纲速度与无量纲复频率关系曲线 ( $\beta = 0.1$ )  
Fig.2 Relationship between the dimensionless speed and dimensionless frequency ( $\beta = 0.1$ )



(a) 复频率实部



(b) 复频率虚部

图 3 无量纲速度与无量纲复频率关系曲线 ( $\beta = 0.4$ )  
Fig.3 Relationship between the dimensionless speed and dimensionless frequency ( $\beta = 0.4$ )

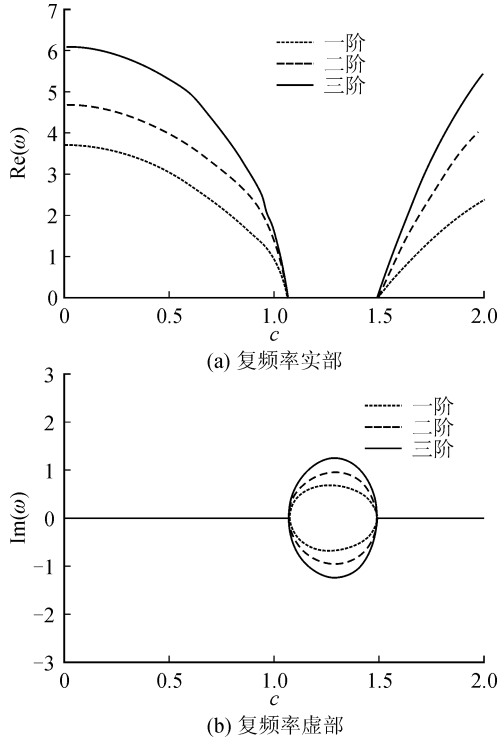


图4 无量纲速度与无量纲复频率关系曲线( $\beta = 0.8$ )  
Fig. 4 Relationship between the dimensionless speed and dimensionless frequency ( $\beta = 0.8$ )

图2为非均匀张力系数 $\beta = 0.1$ 。当 $0 < c < 1.03$ 时,运动薄膜处于稳定状态;当 $1.03 < c < 1.25$ 时,运动薄膜处于发散失稳状态;当无量纲速度 $c > 1.25$ 时,运动薄膜前三阶模态又重新稳定。 $c = 1.03$ 为系统的无量纲临界发散失稳速度,对应薄膜工作的实际临界速度为 $v = 28.7\text{m/s}$ 。

图3为非均匀张力系数 $\beta = 0.4$ 。当 $0 < c < 1.04$ 时,运动薄膜处于稳定状态;当 $1.04 < c < 1.37$ 时,运动薄膜处于发散失稳状态;当无量纲速度 $c > 1.37$ 时,运动薄膜前三阶模态又重新稳定。 $c = 1.04$ 为系统的无量纲临界发散失稳速度,对应薄膜工作的实际临界速度为 $v = 29.0\text{ m/s}$ 。

图4为非均匀张力系数 $\beta = 0.8$ 。当 $0 < c < 1.07$ 时,运动薄膜处于稳定状态;当 $1.07 < c < 1.49$ 时,运动薄膜处于发散失稳状态;当无量纲速度 $c > 1.49$ 时,运动薄膜前三阶模态又重新稳定。 $c = 1.07$ 为系统的无量纲临界发散失稳速度,对应薄膜工作的实际临界速度为 $v = 29.8\text{ m/s}$ 。

由上可知随着非均匀张力系数的增加,系统工作的临界速度增大。当无量纲复频率实部为正,虚部为零时,系统处于稳定状态;当虚部出现,实部为零时,系统是不稳定的,而系统临界速度就是无量纲频率实部和虚部均为零时所对应速度,所以系统工作的临界速度增加时,系统稳定性增强。

### 3.2 斜支承角度对运动薄膜振动特性影响

图5,图6和图7为非均匀张力系数 $\beta = 0.1$ ,张力比 $\lambda = 1$ ,长宽比 $r = 2$ 时运动薄膜斜支承角度分别为 $\theta = \pi/4$ ,  $\theta = \pi/3$ 和 $\theta = 5\pi/12$ 时运动薄膜无量纲复频率与无量纲速度之间的关系曲线。

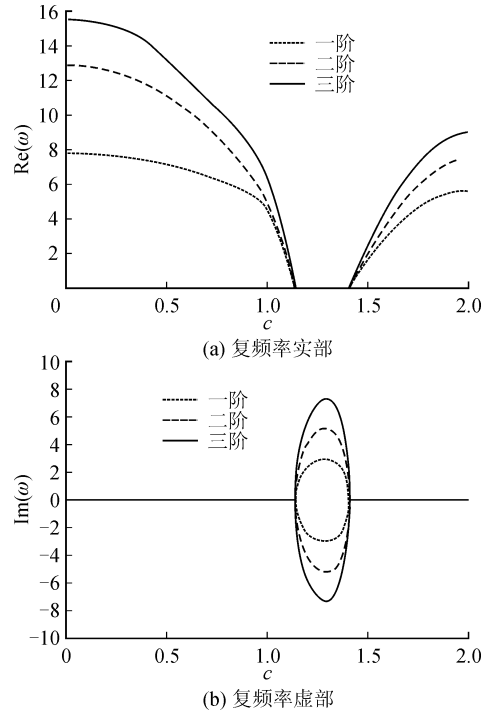


图5 无量纲速度与无量纲复频率关系曲线( $\theta = \pi/4$ )  
Fig. 5 Relationship between the dimensionless speed and dimensionless frequency ( $\theta = \pi/4$ )

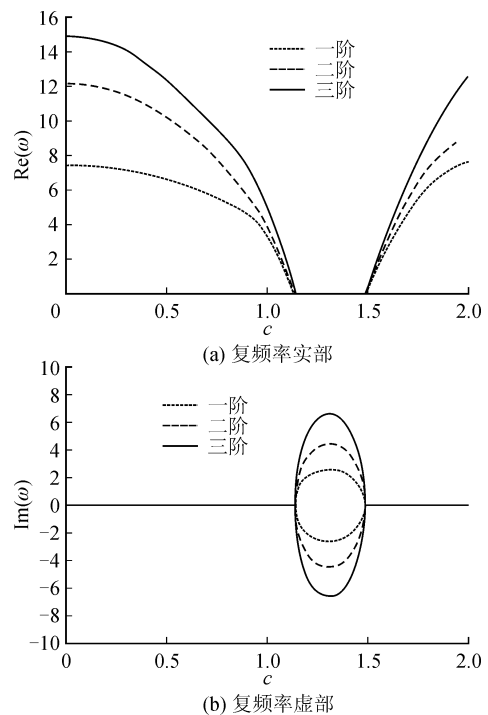


图6 无量纲速度与无量纲复频率关系曲线( $\theta = \pi/3$ )  
Fig. 6 Relationship between the dimensionless speed and dimensionless frequency ( $\theta = \pi/3$ )



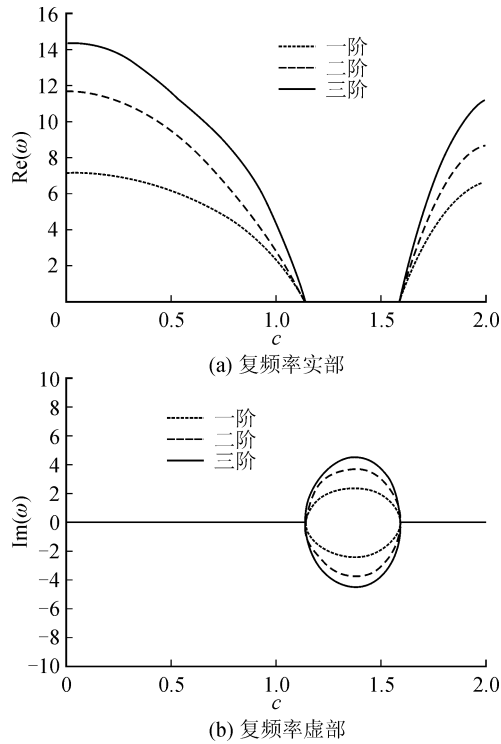


图7 无量纲速度与无量纲复频率关系曲线( $\theta = 5\pi/12$ )  
 Fig. 7 Relationship between the dimensionless speed and dimensionless frequency ( $\theta = 5\pi/12$ )

图5为斜支承角度 $\theta = \pi/4$ 。当 $0 < c < 1.14$ 时,运动薄膜处于稳定状态;当 $1.14 < c < 1.41$ 时,运动薄膜处于发散失稳状态;当无量纲速度 $c > 1.41$ 时运动薄膜前三阶模态又重新稳定。 $c = 1.14$ 为系统的无量纲临界发散失稳速度,对应薄膜工作的实际临界速度为 $v = 32.9$  m/s。

图6为斜支承角度 $\theta = \pi/3$ 。当 $0 < c < 1.14$ 运动时,运动薄膜处于稳定状态;当 $1.14 < c < 1.49$ 时,薄膜处于发散失稳状态;当无量纲速度 $c > 1.49$ 时运动薄膜前三阶模态又重新稳定。 $c = 1.14$ 为系统的无量纲临界发散失稳速度,对应薄膜工作的实际临界速度为 $v = 31.8$  m/s。

图7为斜支承角度 $\theta = 5\pi/12$ 。当 $0 < c < 1.14$ 时,运动薄膜处于稳定状态;当 $1.14 < c < 1.59$ 时,运动薄膜处于发散失稳状态;当无量纲速度 $c > 1.59$ 时运动薄膜前三阶模态又重新稳定。 $c = 1.14$ 为系统的无量纲临界发散失稳速度,对应薄膜工作的实际临界速度为 $v = 31.3$  m/s。

由上可知随着斜支承角度的增加,系统工作的临界速度减小,系统不稳定区域增大。运动薄膜的斜支承角度对系统稳定性有重要影响。

#### 4 结论

本文以陕西北人 B624 卷筒纸印刷机为例,采

用微分求积法对非均匀张力作用下斜支承运动薄膜的横向振动特性进行研究,得到以下结论。

1) 随非均匀张力系数的增加,系统稳定性增强。当非均匀张力系数分别为 $\beta = 0.1$ ,  $\beta = 0.4$ 和 $\beta = 0.8$ 时,系统工作的临界速度 $v$ 分别为28.7 m/s, 29.0 m/s和29.8 m/s。

2) 随斜支承角度的增大,系统稳定性减弱。斜支承角度分别为 $\theta = \pi/4$ ,  $\theta = \pi/3$ 和 $\theta = 5\pi/12$ 时运动薄膜实际工作中的临界速度 $v$ 分别为32.9 m/s, 31.8 m/s和31.3 m/s。适当减小运动薄膜的斜支承角度可有效保障系统的稳定性。

#### 参考文献:

- [1] 王砚,田振,武吉梅,等. 基于解析法的非均匀张力作用下运动薄膜的稳定性[J]. 包装工程, 2016, 37(15): 111-115.  
WANG Yan, TIAN Zhen, WU Jimei, et al. Stability for moving membrane under the non-uniform tension based on analytical method[J]. Packaging Engineering, 2016, 37(15): 111-115.
- [2] 王砚,聂子恒,武吉梅,等. 非均匀张力作用下运动薄膜的稳定性研究[J]. 西安理工大学学报, 2016, 32(1): 58-62.  
WANG Yan, NIE Ziheng, WU Jimei, et al. The study of stability of the moving membrane under non-uniform tension[J]. Journal of Xi'an University of Technology, 2016, 32(1): 58-62.
- [3] BANICHUK N, JERONEN J, NEITTAANMÄKI P, et al. Theoretical study on travelling web dynamics and instability under non-homogeneous tension[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2013, 66: 132-140.
- [4] NGUYEN Q C, HONG K S. Stabilization of an axially moving web via regulation of axial velocity[J]. Journal of Sound and Vibration, 2011, 330(20): 4676-4688.
- [5] MA Liang, CHEN Jiankui, TANG Wei, et al. Transverse vibration and instability of axially travelling web subjected to non-homogeneous tension[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2017, 133: 752-758.
- [6] 武吉梅,张红梅,王砚,等. 非均匀张力作用下运动矩形薄膜振动控制研究[J]. 西安理工大学学报, 2017, 33(4): 379-383.  
WU Jimei, ZHANG Hongmei, WANG Yan, et al. Vibration control of moving rectangular membranes under variable tension[J]. Journal of Xi'an University of Technology, 2017, 33(4): 379-383.
- [7] 武吉梅,邵明月,田振,等. 基于矩理论的凹版印刷机运动薄膜横向振动特性及稳定性[J]. 中国机械工程, 2018, 29(24): 2933-2939.  
WU Jimei, SHAO Mingyue, TIAN Zhen, et al. Transverse vibration characteristics and stability of moving membranes of gravure printing machines based on theory of non-moment[J]. China Mechanical Engineering, 2018, 29(24): 2933-2939.

(下转第378页)

- [7] 程杰铭,郑亮,刘艳. 色彩原理与应用[M]. 北京:印刷工业出版社,2016.
- [8] 郑元林. 印刷品质量检测与控制技术[M]. 北京:化学工业出版社,2020.
- [9] 刘昕. 印刷工艺学[M]. 第二版. 北京:化学工业出版社,2016.
- [10] 苏海霞,张朝晖,赵小燕,等. 太赫兹谱定量测试中朗伯比尔定律表征形式分析[J]. 光谱学与光谱分析, 2013(12):3180-3186.  
SU Haixia, ZHANG Chaohui, ZHAO Xiaoyan, et al. The Lambert-Beer's Law characterization of formal analysis in terahertz spectrum quantitative testing [J]. Spectroscopy and Spectral Analysis, 2013 (12): 3180-3186.
- [11] 张红路. 印刷色序对印品色彩质量的影响[J]. 印刷技术, 2011(1):52-53.
- [12] 赵勇. 色度计的研制及比尔朗伯定律的应用分析[J]. 科技创新导报, 2013(19):26-27.
- [13] 刘真,胡新月,杨华. 基于 Tollenar-Ernst 模型的专色油墨量计算[J]. 包装工程, 2010, 31(11):27-30.  
LIU Zhen, HU Xinyue, YANG Hua. Calculation of the amount of spot color ink based on Tollenar-Ernst mode[J]. Packaging Engineering, 2010, 31(11):27-30.
- [14] 成刚虎,熊康鹏. 纽介堡方程的理论价值及其局限性分析[J]. 中国印刷与包装研究, 2010, 2(5):24-28.  
CHENG Ganghu, XIONG Kangpeng. Theoretical value and limitation of Neugebauer equation[J]. China Printing and Packaging Study, 2010, 2(5):24-28.
- [15] 陈一军,成刚虎. 密度线性方程式的理论误差探析[J]. 西安理工大学学报, 2019, 35(3):361-367.  
CHEN Yijun, CHENG Ganghu. Theoretical error analysis of density linear equation[J]. Journal of Xi'an University of Technology, 2019, 35(3):361-367.
- (责任编辑 王绪迪)

(上接第 372 页)

- [8] 马亮. 柔性基板卷到卷输送中横向振动建模与控制[D]. 武汉:华中科技大学,2018.  
MA Laing. Modeling and control study on the transverse vibration of an axially travelling flexible web in roll-to-roll manufacturing[D]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2018.
- [9] LIEW K M, XIANG Y, KITIPORNCHAI S. Transverse vibration of thick rectangular plates—II. Inclusion of oblique internal line supports [J]. Computers & Structures, 1993, 49(1): 31-58.
- [10] LAI S K, ZHOU L, ZHANG Y Y, et al. Application of the DSC-Element method to flexural vibration of skew plates with continuous and discontinuous boundaries [J]. Thin-Walled Structures, 2011, 49 (9): 1080-1090.
- [11] KETABDARI M J, ALLAHVERDI A, BOREYRIA S, et al. Free vibration analysis of homogeneous and FGM skew plates resting on variable Winkler-Pasternak elastic foundation [J]. Mechanics & Industry, 2016, 17(1): 107.
- [12] PARIDA S, MOHANTY S C. Vibration and stability analysis of functionally graded skew plate using higher order shear deformation theory [J]. Current Climate Change Reports, 2018, 4(1): 1-22.
- [13] RAMU I, SESHU K V G R, VENU M. Natural frequency of skew FGM plates using finite element method [J]. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 2018, 455: 012024.
- [14] 郭旭侠,薛晓飞. 热弹耦合运动斜板振动特性研究[J]. 机械科学与技术, 2019, 38(12):1854-1860.  
GUO Xuxia, XUE Xiaofei. Study on vibration characteristics of thermoelastic coupled moving skew plate [J]. Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering, 2019, 38(12): 1854-1860.
- [15] KUMA D P, SRINIVASA C V. Free vibration studies on skew sandwich plates by FEM [J]. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 2020, 925 (1): 012024.
- [16] 胡寒,聂国隽. 变角度纤维复合材料层合斜板的颤振分析[J]. 力学季刊, 2020, 41(1):69-79.  
HU Han, NIE Guojun. Flutter analysis of laminated skew plates with variable angle tows [J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2020, 41(1): 69-79.
- [17] 金江,袁继峰,葛文璇. 理论力学[M]. 南京:东南大学出版社,2019.
- [18] 侯志勇,王忠民. 轴向运动薄膜的横向振动和稳定性分析[J]. 西安理工大学学报, 2005, 21(4):402-404.  
HOU Zhiyong, WANG Zhongmin: The transverse vibration and stability analysis of an axially moving membrane [J]. Journal of Xi'an University of Technology, 2005, 21(4): 402-404.
- (责任编辑 王绪迪)