

DOI:10.19322/j.cnki.issn.1006-4710.2021.03.016

运营隧道原型-模型衬砌应力理论模型及应用

陶永虎, 饶军应, 熊 鹏, 聂崇欣, 谢财进

(贵州大学 土木工程学院, 贵州 贵阳 550025)

摘要: 为研究运营隧道原型与模型应力关系, 视隧道衬砌为薄板结构, 通过复变函数保角代换计算连拱隧道衬砌应力, 基于相似理论原理建立原型-模型衬砌应力理论分析模型, 结合模型化简、误差分析对其进行优化及合理性验证。研究表明: 原型-模型衬砌应力理论表达式相差一个常数, 此常数可通过相似条件、围岩物理力学性质及边界条件给出; 经保角变换及模型化简, 可间接给出复杂连拱隧道三个方向的衬砌应力, 后由坐标转换给出 $\theta \rightarrow 0$ 和 $\beta \rightarrow 0$ 、 $\theta \rightarrow \pi$ 和 $\beta \rightarrow \pi$ 、 $\theta \rightarrow \pi/2$ 和 $\beta \rightarrow \pi/2$ 等高应力区原型-模型衬砌应力的理论关系; 经分析, 原型与模型衬砌应力实测值、理论值均随时间增加, 且变化趋势一致, 最大误差约为 5.02%; 经应力反演, 理论值与实测值较为接近, 可实时掌握隧道衬砌应力大小及变化趋势, 为后期运营监测提供理论依据。

关键词: 运营隧道; 原型-模型; 衬砌应力; 理论模型; 误差分析; 应力反演

中图分类号: TU91

文献标志码: A

文章编号: 1006-4710(2021)03-0423-10

Operating tunnel prototype-model lining stress theory model and application

TAO Yonghu, RAO Junying, XIONG Peng, NIE Chongxin, XIE Caijin

(School of Civil Engineering, Guizhou University, Guiyang 550025, China)

Abstract: To study the stress relation between the prototype of the operating tunnel and the model, the tunnel lining is regarded as a thin-slab structure, and the lining stress of the double-arch tunnel is calculated by conformal substitution of complex variable functions. Based on the principle of similarity theory, the prototype-model lining stress theoretical analysis model is established, with the model simplification and error analysis used to optimize and verify its rationality. The researches show that there is a constant difference between the theoretical expression of the prototype lining stress and the model, which can be obtained through similar conditions, physical and mechanical properties of the surrounding rock, and boundary conditions; after conformal transformation and model simplification, the lining stress in three directions of complex multi-arch tunnels can be solved indirectly. Then, the theoretical lining stress relation between the prototype and the model in high stress areas such as $\theta \rightarrow 0$ and $\beta \rightarrow 0$, $\theta \rightarrow \pi$ and $\beta \rightarrow \pi$, $\theta \rightarrow \pi/2$ and $\beta \rightarrow \pi/2$ are given by coordinate conversion; after analysis, the measured value, actual measured value and theoretical value of the prototype lining stress and model lining stress have increased with time, the trend of change is the same, and the maximum error is about 5.02%; after stress inversion calculation, the theoretical value is relatively close to the actual measured value, and the magnitude and change trend of the tunnel lining stress can be grasped in real time, providing a theoretical basis for later operation monitoring.

Key words: operating tunnel; prototype-model; lining stress; theoretical model; error analysis; stress inversion

近年来,随着经济的高速发展,各类岩土工程、边坡工程及隧道工程等项目建设愈发频繁,而工程

收稿日期: 2020-10-30; 网络出版日期: 2021-03-19

网络出版地址: <https://kns.cnki.net/kcms/detail/61.1294.N.20210318.1732.008.html>

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51968010,51608141); 贵州省科技基金资助项目([2012]63,[2017]5788)

第一作者: 陶永虎,男,硕士生,研究方向为岩土及隧道工程。E-mail:1562521808@qq.com

通信作者: 饶军应,男,博士,副教授,研究方向为岩土及隧道工程。E-mail:jyrao@gzu.edu.cn

事故也随之增多,尤其在隧道建设方面,由衬砌变形、漏水、内应力增大等原因引起的事故不计其数^[1-4]。目前,大多数施工单位都是通过布设测点测量衬砌变形情况来预判隧道安全与否,但此方法只能大概估计衬砌应变情况,误差较大,故准确判断已建隧道衬砌应力变化对隧道的安全使用是非常必要的。若能建立原型-模型衬砌应力理论模型,通过模型衬砌应力变化反映实际衬砌应力变化,那么就能从理论上准确掌握隧道衬砌应力变化情况,及时采取补救措施,这不但节省了劳动力,同时还保证了隧道运营安全^[5-10]。

在原型与模型试验研究方面,朱叶艇等^[11]进行了异形盾构隧道衬砌应力计算模型及受力特性研究,得到了衬砌应力计算的分析模型,但在原型-模型衬砌应力之间未给出明确的理论关系;江浩等^[12]研究了几何相似比对模型试验及原型试验隧道衬砌内力的影响,总结出相似比的变化对衬砌应力变化影响显著,但未从隧道受力方面给出模型衬砌应力的具体计算方法;张鹏^[13]利用模型试验研究海底隧道衬砌应力变化规律,根据相似准则建立模型试验,总结出衬砌应力与流固耦合之间存在较大关系,但在理论研究方面,没有明确给出其理论计算模型;景诗庭^[14]利用模型试验研究衬砌应力变化,分析了原型-模型试验之间的区别,但未从理论上给出其计算方法;刘金云等^[15]进行了流固耦合下的输水隧道动力模型试验研究,发现通过数值模拟,模型试验衬砌应力结果可反映到原型试验值上,但未从理论方面进行研究解释。综上所述,目前关于模型-原型试验的研究主要集中于相似材料、模型与原型关系、几何相似比对模型的影响等方面,并通过数值模拟来反映衬砌应力变化,但参数选择及材料假定会给数值模拟带来一定的偏差,导致模拟结果模棱两可,故从理论方面研究原型-模型衬砌应力关系是很有必要的,这既能纠正数值模拟的偏差,也能为衬砌应力计算提供理论方法。

本文在前人研究基础上,利用相似原理建立原型-模型衬砌应力关系,通过复变函数保角变换将双连拱隧道衬砌转化为两个相切的圆环,通过假定应力解析函数及位移解析函数对变换的模型进行应力求解,最后再根据已建的应力关系,得到化简后的原型-模型衬砌应力理论计算模型,并对模型进行化简及分析。

1 模型构建

1.1 原理介绍

这里视隧道衬砌为薄板结构,本模型试验采用

静态平面应变模型。隧道衬砌相似条件主要依据弹性力学本构关系,若以下标 N 和 M 分别表示原型和模型的物理量,则原型和模型都应满足弹性力学的基本方程^[16]:

1) 平衡微分方程

原型:

$$\begin{cases} \frac{\partial (\sigma_x)_N}{\partial x_N} + \frac{\partial (\tau_{xy})_N}{\partial y_N} + (f_x)_N = 0 \\ \frac{\partial (\sigma_y)_N}{\partial y_N} + \frac{\partial (\tau_{yx})_N}{\partial x_N} + (f_y)_N = 0 \end{cases} \quad (1)$$

模型:

$$\begin{cases} \frac{\partial (\sigma_x)_M}{\partial x_M} + \frac{\partial (\tau_{xy})_M}{\partial y_M} + (f_x)_M = 0 \\ \frac{\partial (\sigma_y)_M}{\partial y_M} + \frac{\partial (\tau_{yx})_M}{\partial x_M} + (f_y)_M = 0 \end{cases} \quad (2)$$

2) 相容方程

原型:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_N^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_N^2} \right) [(\sigma_x)_N + (\sigma_y)_N] = 0 \quad (3)$$

模型:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_M^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_M^2} \right) [(\sigma_x)_M + (\sigma_y)_M] = 0 \quad (4)$$

3) 物理方程

原型:

$$\begin{cases} (\epsilon_x)_N = \frac{1+\mu_N}{E_N} [(1-\mu_N)(\sigma_x)_N - \mu_N(\sigma_y)_N] \\ (\epsilon_y)_N = \frac{1+\mu_N}{E_N} [(1-\mu_N)(\sigma_y)_N - \mu_N(\sigma_x)_N] \\ (\gamma_{xy})_N = \frac{2(1+\mu_N)}{E_N} (\tau_{xy})_N \end{cases} \quad (5)$$

模型:

$$\begin{cases} (\epsilon_x)_M = \frac{1+\mu_M}{E_M} [(1-\mu_M)(\sigma_x)_M - \mu_M(\sigma_y)_M] \\ (\epsilon_y)_M = \frac{1+\mu_M}{E_M} [(1-\mu_M)(\sigma_y)_M - \mu_M(\sigma_x)_M] \\ (\gamma_{xy})_M = \frac{2(1+\mu_M)}{E_M} (\tau_{xy})_M \end{cases} \quad (6)$$

4) 几何方程

原型:

$$\begin{cases} (\epsilon_x)_N = \frac{\partial u_N}{\partial x_N} \\ (\epsilon_y)_N = \frac{\partial v_N}{\partial y_N} \\ (\gamma_{xy})_N = \frac{\partial v_N}{\partial x_N} + \frac{\partial u_N}{\partial y_N} \end{cases} \quad (7)$$

模型:

$$\begin{cases} (\epsilon_x)_M = \frac{\partial u_M}{\partial x_M} \\ (\epsilon_y)_M = \frac{\partial v_M}{\partial y_M} \\ (\gamma_{xy})_M = \frac{\partial v_M}{\partial x_M} + \frac{\partial u_M}{\partial y_M} \end{cases} \quad (8)$$

5) 边界条件

原型:

$$\begin{cases} (\bar{f}_x)_N = (\sigma_x)_N \cos\beta + (\tau_{xy})_N \sin\beta \\ (\bar{f}_y)_N = (\sigma_y)_N \cos\beta + (\tau_{xy})_N \sin\beta \end{cases} \quad (9)$$

模型:

$$\begin{cases} (\bar{f}_x)_M = (\sigma_x)_M \cos\beta + (\tau_{xy})_M \sin\beta \\ (\bar{f}_y)_M = (\sigma_y)_M \cos\beta + (\tau_{xy})_M \sin\beta \end{cases} \quad (10)$$

式(1)~(10)中:\$(\sigma_x)_N\$、\$(\sigma_y)_N\$、\$(\tau_{xy})_N\$、\$(\bar{f}_x)_N\$分别表示原型隧道衬砌正应力、剪应力及 \$x\$ 方向面力;\$(\sigma_x)_M\$、\$(\sigma_y)_M\$、\$(\tau_{xy})_M\$、\$(\bar{f}_x)_M\$分别表示模型隧道衬砌正应力、剪应力及 \$y\$ 方向的面力;\$(\epsilon_x)_N\$、\$(\epsilon_y)_N\$、\$(\gamma_{xy})_N\$分别为原型隧道衬砌正应变、切应变;\$(\epsilon_x)_M\$、\$(\epsilon_y)_M\$、\$(\gamma_{xy})_M\$分别为模型隧道衬砌正应变、切应变;\$\mu_N\$、\$E_N\$为原型隧道围岩泊松比及弹性模量;\$\mu_M\$、\$E_M\$为模型隧道围岩泊松比及弹性模量;\$\beta\$为边界面的外法线与 \$x\$ 方向的夹角。

通过假定材料几何相似比,由式(1)~(10)可以确定模型试验的相似参数。

1.2 模型参数设定

由于双连拱隧道衬砌受力较为复杂,且假设衬砌材料均为弹性连续介质,故采用方程分析法确定相似常数。根据方程分析相似准则,设 \$\xi\$ 表示相似常数,将其分别代入式(1)~(10)。

依据式(1)得:

$$\begin{cases} \frac{\xi_\sigma \partial (\sigma_x)_N}{\xi_L \partial x_N} + \frac{\xi_\sigma \partial (\tau_{xy})_N}{\xi_L \partial y_N} + \xi_f (\bar{f}_x)_N = 0 \\ \frac{\xi_\sigma}{\xi_L \xi_\gamma} \left(\frac{\partial (\sigma_x)_M}{\partial x_M} + \frac{\partial (\tau_{xy})_M}{\partial y_M} + (\bar{f}_x)_M \right) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \xi_\sigma = 1 \\ \xi_L \xi_\gamma = 1 \\ \pi_1 = \frac{\sigma_N}{\gamma_N L_N} = \frac{\sigma_M}{\gamma_M L_M} = 1 \end{cases} \quad (11)$$

同理,将 \$\xi_\sigma\$、\$\xi_L\$、\$\xi_\epsilon\$、\$\xi_E\$代入式(3)~(10)得:

$$\begin{cases} \xi_\sigma^2 = 1 \\ \xi_L^2 = 1 \\ \pi_2 = \frac{\sigma_N^2}{L_N^2} = \frac{\sigma_M^2}{L_M^2} = 1 \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} \xi_\epsilon \xi_E = 1 \\ \xi_\sigma = 1 \\ \pi_3 = \frac{\epsilon_N \epsilon_N}{\sigma_N} = \frac{\epsilon_M \epsilon_M}{\sigma_M} \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} \xi_\epsilon \xi_L = 1 \\ \xi_\delta = 1 \\ \pi_4 = \frac{\epsilon_N L_N}{\sigma_N} = \frac{\epsilon_M L_M}{\sigma_M} = 1 \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} \xi_f = 1 \\ \xi_\sigma = 1 \\ \pi_5 = \frac{\bar{f}_N}{\sigma_N} = \frac{\bar{f}_M}{\sigma_M} = 1 \end{cases} \quad (15)$$

式中:\$L_N\$为原型尺寸长度;\$L_M\$为模型尺寸长度;\$\xi_\sigma\$为应力相似常数;\$\xi_L\$为长度相似常数;\$\xi_\epsilon\$为应变相似常数;\$\xi_E\$为弹性模量相似常数;\$\xi_\delta\$为位移相似常数;\$\xi_\mu\$为泊松比相似常数,且 \$\xi_\mu = 1\$;\$\xi_f\$为面力相似常数;\$\xi_\gamma\$为体力相似常数;\$\pi_1 \sim \pi_5\$为相似准则。

已知相似比时,便可通过式(11)~(15)求得其他相似常数,从而确定原型应力与模型应力之间的数量关系。

1.3 原型-模型衬砌应力关系构建

由相似试验可知,模型衬砌应力与原型衬砌应力之间相差一个常数关系,为求得模型与原型衬砌应力之间的关系,现将连拱隧道看作是一个平面应变问题,只在 \$x\$、\$y\$ 方向受均布压力,其计算原型如图 1、图 2 所示。

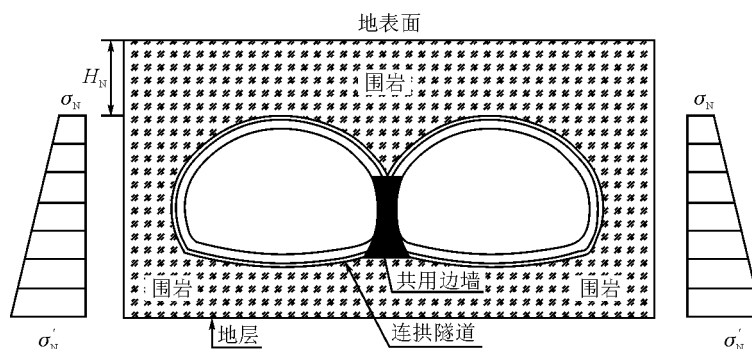


图 1 原型连拱隧道自重应力场分布

Fig. 1 Self-weight stress field distribution of the prototype double-arch tunnel

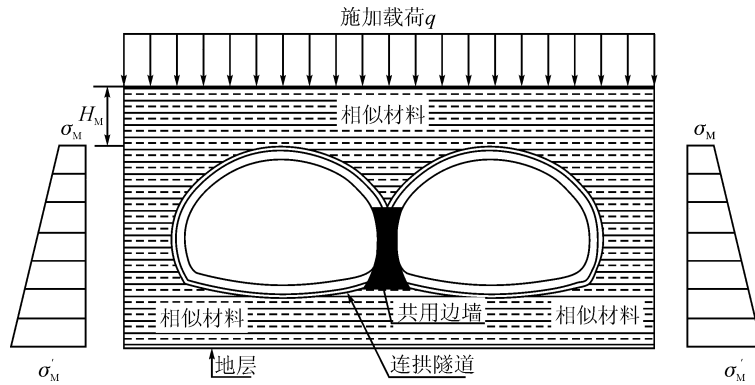


图 2 等效模型施加外加应力的应力分布

Fig.2 Stress distribution of equivalent model applied stress

1.4 原型-模型衬砌应力关系

1.4.1 σ_N 与 σ_M 关系的建立

在非两拱共用边墙部位,隧道衬砌受力较两拱连接处简单,采用弹性力学本构方程进行求解,其计算模型如图 3 所示。假设衬砌薄板均布压力为 q , 惯性矩为 W , K 为弯曲刚度,板厚为 t 。

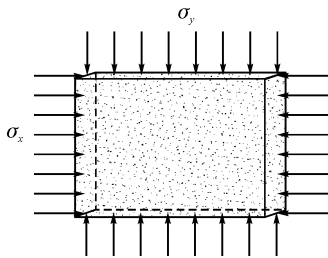


图 3 薄板受力

Fig.3 Force of thin plate

根据材料力学薄板弯曲挠度方程^[17]:

$$\nabla \nabla^2 \delta = 0 \tag{16}$$

对应直角坐标方程中,则有:

$$\frac{\partial^4 \delta}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \delta}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 \delta}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{q}{K} \tag{17}$$

$$K = \frac{Et^2}{12(1-\mu^2)}$$

式中: δ 为薄板发生弯曲时产生的挠度; ∇ 表示哈密顿算子。

假设该隧道的几何相似比 $\xi_L = 1/\lambda$, 弹性模量 $E_N = E_M$, 泊松比 $\mu_N = \mu_M$, 依据式(11)~(15)得:

$$\begin{cases} \xi_\sigma = \frac{1}{\lambda} \\ \xi_y = 1 \\ \xi_E = 1 \\ \xi_\epsilon = 1 \\ \xi_J = \frac{1}{\lambda} \\ \xi_\delta = \frac{1}{\lambda} \end{cases} \tag{18}$$

再由式(11)~(15)可以得到原型与模型相关计算指标的关系:

$$\begin{cases} \delta_M = \xi_\delta \delta_N \\ x_M = \xi_L x_N \\ y_M = \xi_L y_N \\ H_M = \xi_L H_N \\ \mu_M = \xi_\mu \mu_N \\ E_M = \xi_E E_N \\ q_M = \xi_q q_N \\ K_M = \xi_K K_N \end{cases} \tag{19}$$

原型与模型薄板弯曲方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial^4 \delta_N}{\partial x_N^4} + \frac{\partial^4 \delta_N}{\partial y_N^4} + 2 \frac{\partial^4 \delta_N}{\partial x_N^2 \partial y_N^2} = \frac{q_N}{K_N} \\ \frac{\partial^4 \delta_M}{\partial x_M^4} + \frac{\partial^4 \delta_M}{\partial y_M^4} + 2 \frac{\partial^4 \delta_M}{\partial x_M^2 \partial y_M^2} = \frac{q_M}{K_M} \end{cases} \tag{20}$$

由式(18)~(20)解得:

$$\lambda^3 \frac{H_M^3}{H_N^3} = \frac{E_N(1-\mu_M^2)}{E_M(1-\mu_N^2)} \tag{21}$$

若 $E_N = E_M, \mu_N = \mu_M$ 则:

$$\begin{cases} H_M = \frac{H_N}{\lambda} \\ \sigma_N = \frac{\sigma_M}{\lambda} \end{cases} \tag{22}$$

若,则:

$$\begin{cases} H_M = \frac{H_N}{\lambda} \left[\frac{E_N(1-\mu_M^2)}{E_M(1-\mu_N^2)} \right]^{2/3} \\ \sigma_N = \frac{(1-\mu_N^2)}{(1-\mu_M^2)} \left(\frac{\lambda H_M}{H_N} \right)^2 \sigma_M \end{cases} \Rightarrow$$

即:

$$\begin{cases} \sigma_{Nr} = \frac{(1-\mu_N^2)}{(1-\mu_M^2)} \left[\frac{E_N(1-\mu_M^2)}{E_M(1-\mu_N^2)} \right]^{2/3} \sigma_{Mr} \\ \sigma_{Ny} = \frac{(1-\mu_N^2)}{(1-\mu_M^2)} \left[\frac{E_N(1-\mu_M^2)}{E_M(1-\mu_N^2)} \right]^{2/3} \sigma_{My} \end{cases} \tag{23}$$

由式(23)可知,模型衬砌应力与原型衬砌应力

存在理论关系,通过确定模型衬砌应力,便可知道该隧道衬砌的受力情况及变化规律。

1.4.2 模型应力 σ_M 复变解

在求解无中墙连拱隧道衬砌应力时,将其视为无限平面中的孔口问题,忽略边界条件及地应力的变化^[18]。衬砌问题是一个多连通域问题,其边界由围岩、隧道衬砌、空气组成,而本文在计算衬砌应力时,利用复变函数保角变换思想,将隧道衬砌假设为连续相切的圆环,依据复变函数^[19-22] 幂级数展开及结合边界条件便可求得其隧道衬砌应力,该变换模型属于三连通域问题。该隧道模型关于边墙中心对称,故受力相同,下文均只取变换后的左圆环进行应力计算,其计算图如图4所示(其中 ρ, θ 表示极坐标下的极径、旋转角, a, b 表示保角变换后的衬砌内径、衬砌外径)。

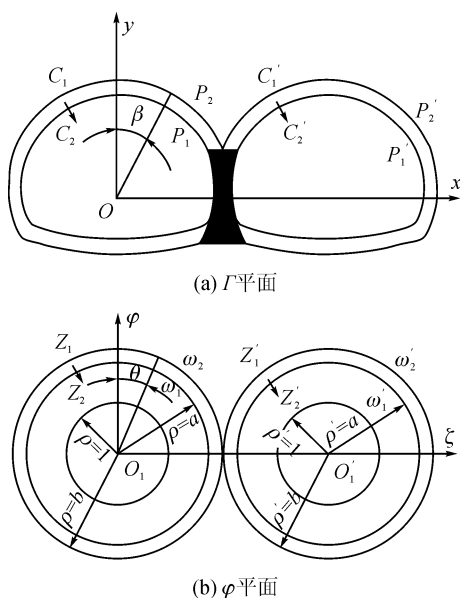


图4 Γ 平面保角代换为 φ 平面示意图
Fig. 4 Schematic diagram of Γ plane conformal substitution to φ plane

Γ 平面中, C_1, C_1' 与 C_2, C_2' 分别为左幅隧道和右幅隧道的围岩与衬砌; P_1, P_1' 分别表示左幅隧道与右幅隧道衬砌与大气的接触面; P_2, P_2' 分别表示左幅隧道与右幅隧道衬砌与围岩的接触面,满足衬砌与围岩接触时的连续边界条件。由 Γ 平面通过保角代换得 φ 平面圆环结构,其中 C_1, C_1', C_2, C_2' 区域映射为 φ 平面的 Z_1, Z_1', Z_2, Z_2' 区域; P_1, P_1', P_2, P_2' 区域映射为 φ 平面的 $\omega_1, \omega_1', \omega_2, \omega_2'$ 区域。

设 $\chi(\Gamma), \psi(\Gamma)$ 分别为应力解析函数、位移解析函数,则各计算指标用复函数表示为:

应力分量:

$$\begin{cases} \sigma_x + \sigma_y = 4\text{Re}[\chi'(\Gamma)] \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[\overline{\Gamma}\chi''(\Gamma) + \psi'(\Gamma)] \end{cases} \quad (24)$$

位移分量:

$$2G(u + iv) = K\chi(\Gamma) - \Gamma\overline{\chi'(\Gamma)} - \overline{\psi(\Gamma)} \quad (25)$$

在 P_1 边界面,其边界条件为:

$$i \int_A^F (f_x + if_y) ds = [\chi(\Gamma) + \Gamma\overline{\chi'(\Gamma)} + \overline{\psi(\Gamma)}]_A^F \quad (26)$$

在 P_2 边界面,其边界条件为:

$$i \int_C^D (f_x + if_y) ds = [\chi(\Gamma) + \Gamma\overline{\chi'(\Gamma)} + \overline{\psi(\Gamma)}]_C^D \quad (27)$$

式中: u, v 分别表示围岩水平和竖向位移; f_x, f_y 分别表示 x, y 方向的面力; A 为弧长起算点, F 为边界上任一点; C 为弧长起算点, D 为边界上任一点; G 为剪切模量, $G = E/(1 + 2\mu)$; μ 为泊松比。

在双连通域中,其应力解析函数和位移解析函数的形式为:

$$\begin{cases} \chi(\Gamma) = -\frac{1}{2\pi(1+j)} \sum_{j=1}^m (f_x + if_y) \cdot \\ \quad \text{Ln}(\Gamma - \Gamma_j) + \chi_*(\Gamma) \\ \psi(\Gamma) = -\frac{j}{2\pi(1+j)} \sum_{j=1}^m (f_x - if_y) \cdot \\ \quad \text{Ln}(\Gamma - \Gamma_j) + \psi_*(\Gamma) \end{cases} \quad (28)$$

式中: $\chi_*(\Gamma)$ 为 $\rho=1$ 单连通域的应力单值解析函数; $\psi_*(\Gamma)$ 为 $\rho=1$ 单连通域的位移单值解析函数; m 为边界值。

利用复变函数共性映射原理求解复杂平面问题时,常将复杂的计算截面通过保角代换为规则的几何形状进行求解,结合应力和位移边界条件进行计算。由于隧道衬砌受力问题可以理解为平面应变孔口受力问题,故将式(28)做如下化简:

取映射函数 $\Gamma = \Phi(\varphi) = b/\zeta, \varphi = \rho(\cos\theta + isin\theta) = \rho e^{i\theta}$, 从而得到 φ 平面的极坐标复变函数方程:

$$\begin{cases} \chi(\varphi) = -\frac{1+\mu}{8\pi} (f_x + if_y) \text{Ln}\varphi + \\ \quad M \frac{b}{\varphi} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \zeta^k \\ \psi(\varphi) = -\frac{3-\mu}{8\pi} (f_x - if_y) \text{Ln}\varphi + \\ \quad (M' + iF') \frac{b}{\zeta} + \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \zeta^k \end{cases} \quad (29)$$

其中:

$$\begin{cases} \chi_*(\varphi) = \frac{m_1}{\Gamma} + \frac{m_2}{\Gamma^2} + \dots \\ \psi_*(\varphi) = \frac{s_1}{\Gamma} + \frac{s_2}{\Gamma^2} + \dots \\ \alpha_k = \frac{m_k}{b^k} \\ \eta_k = \frac{s_k}{b^k} \end{cases} \quad (30)$$

式中: M, M', F' 为无穷远处应力常数; m_k, s_k 为边界面上某一点; ζ^k 为幂级数展开关于 ζ 的项; b^k 表示常数 b 在第 k 序号时对应的幂; k 为大于 0 的正整数, $k=3-4\mu$ 。

在极坐标下, 应力分量:

$$\begin{cases} \sigma_\theta - \sigma_\rho = 4\text{Re}[\chi(\varphi)] \\ \sigma_\theta - \sigma_\rho + i\tau_{\rho\theta} = \frac{2\varphi^2}{\rho\Phi'(\varphi)} [\overline{\Phi(\varphi)}\chi'(\varphi) + \overline{\Phi'(\varphi)}\psi'(\varphi)] \end{cases} \quad (31)$$

利用 Laurent 幂级数进行求解, 将 $\chi(\Gamma), \psi(\Gamma)$ 在 φ 平面上展开:

$$\begin{cases} \chi(\Gamma) = \Phi(\chi(\Gamma)) = \chi(\varphi) = \alpha_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \zeta^k + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \zeta^{-k} \\ \psi(\Gamma) = \Phi(\psi(\Gamma)) = \psi(\varphi) = \eta_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k \zeta^k + \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \zeta^{-k} \end{cases} \quad (32)$$

式中: α_0 和 η_0 分别表示初始地应力及初始位移。

对于该隧道模型, 在 φ 平面上有三个应力边界, 且在三个界面均不考虑面力, 即当 $\rho=1, \rho=a, \rho=b$ 时, 有:

$$\begin{cases} \chi(\varphi) + \frac{\Phi(\varphi)}{\Phi'(\varphi)} \overline{\chi'(\varphi)} + \overline{\psi(\varphi)} = 0 \\ \psi(\varphi) + \frac{\Phi(\varphi)}{\Phi'(\varphi)} \overline{\psi'(\varphi)} + \overline{\chi(\varphi)} = 0 \end{cases}$$

假设隧道左侧和右侧最大荷载为 q_1 , 拱顶最大

$$\begin{cases} \sigma_\rho + \sigma_\theta = \frac{q_1 + q_2}{2} \left[2 + \left(1 - \frac{4b^2}{\rho^2} + \frac{3b^4}{\rho^4} \right) \sin 2\theta - \left(1 + \frac{3b^4}{\rho^4} \right) \cos 2\theta \right] \\ \sigma_\rho - \sigma_\theta = \frac{q_1 + q_2}{2} \left[-\frac{2b^2}{\rho^2} + \left(1 - \frac{4b^2}{\rho^2} + \frac{3b^4}{\rho^4} \right) \sin 2\theta + \left(1 + \frac{3b^4}{\rho^4} \right) \cos 2\theta \right] \end{cases} \quad (35)$$

将式(35)代入式(34)得到:

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{q_1 + q_2}{4} \left[2 + \left(1 - \frac{4b^2}{\rho^2} + \frac{3b^4}{\rho^4} \right) \sin 2\theta - \left(1 + \frac{3b^4}{\rho^4} \right) \cos 2\theta \right] + \\ \quad \frac{q_1 + q_2}{4} \left[-\frac{2b^2}{\rho^2} + \left(1 - \frac{4b^2}{\rho^2} + \frac{3b^4}{\rho^4} \right) \sin 2\theta + \left(1 + \frac{3b^4}{\rho^4} \right) \cos 2\theta \right] \cos 2\beta - \\ \quad \frac{q_1 + q_2}{2} \left(1 + \frac{2b^2}{\rho^2} - \frac{3b^4}{\rho^4} \right) \sin 2\theta \sin 2\beta \\ \sigma_y = \frac{q_1 + q_2}{4} \left[2 + \left(1 - \frac{4b^2}{\rho^2} + \frac{3b^4}{\rho^4} \right) \sin 2\theta - \left(1 + \frac{3b^4}{\rho^4} \right) \cos 2\theta \right] - \\ \quad \frac{q_1 + q_2}{4} \left[-\frac{2b^2}{\rho^2} + \left(1 - \frac{4b^2}{\rho^2} + \frac{3b^4}{\rho^4} \right) \sin 2\theta + \left(1 + \frac{3b^4}{\rho^4} \right) \cos 2\theta \right] \cos 2\beta + \\ \quad \frac{q_1 + q_2}{2} \left(1 + \frac{2b^2}{\rho^2} - \frac{3b^4}{\rho^4} \right) \sin 2\theta \sin 2\beta \\ \tau_{xy} = \frac{q_1 + q_2}{2} \left[-\frac{2b^2}{\rho^2} + \left(1 - \frac{4b^2}{\rho^2} + \frac{3b^4}{\rho^4} \right) \sin 2\theta + \left(1 + \frac{3b^4}{\rho^4} \right) \cos 2\theta \right] \sin 2\beta + \\ \quad \frac{q_1 + q_2}{2} \left(1 + \frac{2b^2}{\rho^2} - \frac{3b^4}{\rho^4} \right) \sin 2\theta \cos 2\beta \end{cases} \quad (36)$$

式(36)较为复杂, 而真实修建隧道时, 只考虑最

荷载为 q_2 , 由式(28)~(32)结合边界条件化简可得:

$$\begin{cases} \sigma_\theta = \frac{q_1 + q_2}{2} \left[\left(1 + \frac{b^2}{\rho^2} \right) - \left(1 + \frac{3b^4}{\rho^4} \right) \cos 2\theta \right] \\ \sigma_\rho = \frac{q_1 + q_2}{2} \left[\left(1 - \frac{b^2}{\rho^2} \right) + \left(1 - \frac{4b^2}{\rho^2} + \frac{3b^4}{\rho^4} \right) \sin 2\theta \right] \\ \tau_{\rho\theta} = \frac{q_1 + q_2}{2} \left(1 + \frac{2b^2}{\rho^2} - \frac{3b^4}{\rho^4} \right) \sin 2\theta \end{cases} \quad (33)$$

由式(33)可得其衬砌所受应力关系, 通过参数的确定便可求得衬砌在各个方向的应力值, 结合式(23)就可得到原型-模型的衬砌应力关系。

2 模型化简及分析

2.1 模型化简

由于式(23)是直角坐标下的方程, 式(33)是极坐标下的应力方程, 为了便于计算, 进行相应坐标变换, 变换公式为:

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos 2\beta - \tau_{\rho\theta} \sin 2\beta \\ \sigma_y = \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} - \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos 2\beta + \tau_{\rho\theta} \sin 2\beta \\ \tau_{xy} = \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \sin 2\beta + \tau_{\rho\theta} \cos 2\beta \end{cases} \quad (34)$$

$\sigma_\rho + \sigma_\theta, \sigma_\rho - \sigma_\theta$ 计算如下:

大衬砌应力的影响(应力过大, 容易引起衬砌开裂、

渗水),为安全起见,现对模型进行如下简化:根据弹性力学可知 $\sigma_\rho + \sigma_\theta = \sigma_x + \sigma_y$,根据保角代换可知当 $\theta \rightarrow 0$ 时,相应的 $\beta \rightarrow 0$,此时对应的衬砌应力为边墙应力最大值,拱顶最大荷载 q_2 几乎为零,这时 ρ 近似为 B (边界值),衬砌应力为:

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{q_1}{2} \\ \sigma_y = -\frac{3b^4}{2B^4} \\ \tau_{xy} = 0 \end{cases} \quad (37)$$

式(37)即为右边墙受到的应力情况,符合隧道在边墙处的衬砌受力情况。

当 $\theta \rightarrow \pi$ 时,相应的 $\beta \rightarrow \pi$,此时不考虑拱顶最大荷载 q_2 ,左边墙衬砌受力为:

$$\begin{cases} \sigma_x = -\frac{q_1}{2} \\ \sigma_y = \frac{3b^4}{2B^4} \\ \tau_{xy} = 0 \end{cases} \quad (38)$$

当 $\theta \rightarrow \pi/2$ 时,相应的 $\beta \rightarrow \pi/2$,此时不考虑边墙最大荷载 q_1 ,拱顶部位衬砌受力为:

$$\begin{cases} \sigma_x = q_2 \left(1 + \frac{2b^4}{h^4}\right) \\ \sigma_y = \frac{q_2}{2} \left(1 - \frac{b^4}{h^4}\right) \\ \tau_{xy} = 0 \end{cases} \quad (39)$$

式中: h 为隧道净高。

根据式(23)及式(37)~(39)建立组合模型,其结果为:

当 $\theta \rightarrow 0, \beta \rightarrow 0$ 时:

$$\begin{cases} \sigma_{N_x} = \frac{q_1(1-\mu_N^2)}{2(1-\mu_M^2)} \sqrt[3]{\left[\frac{E_N(1-\mu_M^2)}{E_M(1-\mu_N^2)}\right]^2} \\ \sigma_{N_y} = -\frac{3b^4(1-\mu_N^2)}{2B^4(1-\mu_M^2)} \sqrt[3]{\left[\frac{E_N(1-\mu_M^2)}{E_M(1-\mu_N^2)}\right]^2} \end{cases} \quad (40)$$

当 $\theta \rightarrow \pi, \beta \rightarrow \pi$ 时:

$$\begin{cases} \sigma_{N_x} = -\frac{q_1(1-\mu_N^2)}{2(1-\mu_M^2)} \sqrt[3]{\left[\frac{E_N(1-\mu_M^2)}{E_M(1-\mu_N^2)}\right]^2} \\ \sigma_{N_y} = \frac{3b^4(1-\mu_N^2)}{2B^4(1-\mu_M^2)} \sqrt[3]{\left[\frac{E_N(1-\mu_M^2)}{E_M(1-\mu_N^2)}\right]^2} \end{cases} \quad (41)$$

当 $\theta \rightarrow \pi/2, \beta \rightarrow \pi/2$ 时:

$$\begin{cases} \sigma_{N_x} = q_2 \left(1 + \frac{2b^4}{h^4}\right) \frac{(1-\mu_N^2)}{(1-\mu_M^2)} \sqrt[3]{\left[\frac{E_N(1-\mu_M^2)}{E_M(1-\mu_N^2)}\right]^2} \\ \sigma_{N_y} = \frac{q_2}{2} \left(1 - \frac{b^4}{h^4}\right) \frac{(1-\mu_N^2)}{(1-\mu_M^2)} \sqrt[3]{\left[\frac{E_N(1-\mu_M^2)}{E_M(1-\mu_N^2)}\right]^2} \end{cases} \quad (42)$$

式(40)~(42)即为隧道衬砌受力的三种极端情况,保证三种应力安全情况下,隧道偏于安全。

2.2 误差分析

为分析该理论模型的误差变化情况,现做如下计算:

令 $k = \frac{(1-\mu_N^2)}{(1-\mu_M^2)} \left[\frac{E_N(1-\mu_M^2)}{E_M(1-\mu_N^2)}\right]^{2/3}$,那么该理论模型可简化为形如 $y=f(x)$ 的函数形式,即 $\sigma_N = K\sigma_M$,属于一次函数的求解问题。令 $y=\sigma_N, x=\sigma_M$,

则有 $y=kx$,假设自变量的准确值为 x^* ,近似值为 x ,因变量的准确值为 y^* ,近似值为 y ,依据数值分析^[22]可得:

$$y^* - y = k(x^* - x)$$

记 $e(y)=y^*-y, e(x)=x^*-x$,则有:

$$e(y) = ke(x)$$

由 Taylor 公式展开得到绝对误差及相对误差:

$$\begin{cases} e(y) = f'(x)e(x) \\ e_r(y) = \frac{f'(x)}{f(x)}e_r(x) \end{cases} \quad (43)$$

将已知条件代入式(43)得:

$$\begin{cases} e(\sigma_N) = \frac{(1-\mu_N^2)}{(1-\mu_M^2)} \left[\frac{E_N(1-\mu_M^2)}{E_M(1-\mu_N^2)}\right]^{2/3} e(\sigma_M) \\ e_r(\sigma_N) = \frac{(1-\mu_N^2)}{(1-\mu_M^2)} \left[\frac{E_N(1-\mu_M^2)}{E_M(1-\mu_N^2)}\right]^{2/3} \frac{1}{\sigma_M} e_r(\sigma_M) \end{cases} \quad (44)$$

式(44)即为该模型的误差表达式,只要知道其相似参数,便可确定其误差范围。

3 典例分析

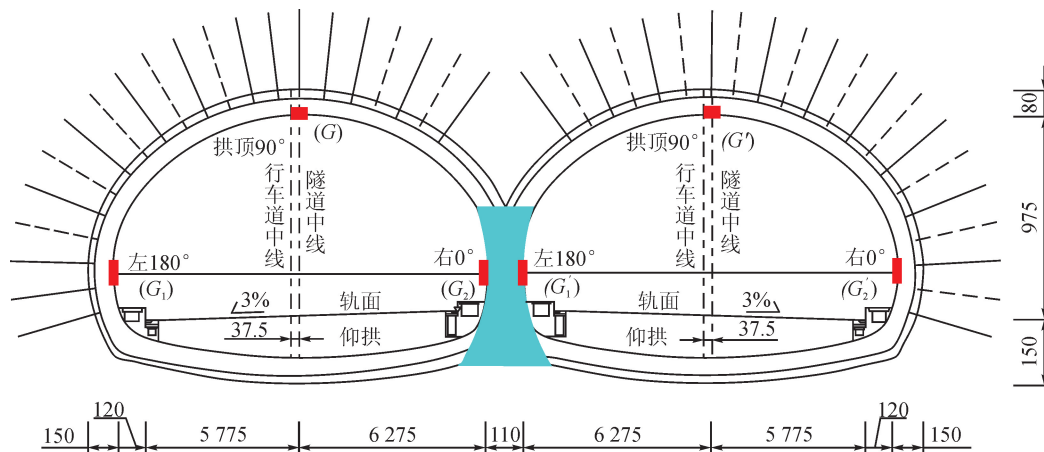
本文依托于云南大理某连拱隧道,其右幅 K37+750~K38+205段(左幅 ZK37+742~ZK38+180段)地形起伏较大,右幅全长 455 m(左幅 438 m),最大埋深 64.76 m。隧道区海拔高程 1 743~1 817 m,相对高差 74 m,属构造剥蚀中山地貌区。隧道区地形较为陡峻,地表植被发育较好。隧道围岩等级为 V 级,围岩较破碎,风化岩较多。

该模型的相关相似常数为 $\xi_L = 25, \xi_\gamma = 1, \xi_\varepsilon = \xi_\mu = 1, \xi_R = \xi_\sigma = \xi_C = \xi_E = 25$ (ξ_R, ξ_C 为强度相似常数、粘聚力相似常数),其相关的物理力学参数及相似材料力学参数如表 1 所示。其测点布置如图 5 所示,由于隧道左右幅受力情况相同,现取左幅隧道进行衬砌应力分析,原型-模型相关参数如表 2 所示,理论值与原型测量值相关参数如表 3 所示。原型-模型衬砌应力如图 6 所示。

表 1 隧道物理力学参数

Tab. 1 Parameters of prototype tunnel

围岩类别	粘聚力 C / GPa	内摩擦角 φ / ($^{\circ}$)	泊松比 μ	弹性模量 E / GPa	容重 γ / ($\text{kN} \cdot \text{m}^{-3}$)	单折抗压强度 R_a / MPa
原型 V	1.30	37	0.20	10.00	24.00	5.20
模型 V	0.052	45	0.400	0.284	24.00	0.028



注:图中红色方形点为测点。

图 5 测点布置示意图(单位:cm)

Fig. 5 Schematic diagram of measuring point layout (unit: cm)

表 2 模型实测值与原型实测值之间的关系

Tab. 2 Relationship between model measurement value and prototype measurement value

时间/d	$\theta=0^{\circ}, \beta=0^{\circ}$ 时应力值/kPa		$\theta=90^{\circ}, \beta=90^{\circ}$ 时应力值/kPa		$\theta=180^{\circ}, \beta=180^{\circ}$ 时应力值/kPa	
	原型 A	模型 G	原型 A_1	模型 G_1	原型 A_2	模型 G_2
1	0	0	0	0	0	0
3	180	51.12	100	28.4	160	45.44
5	230	65.32	150	42.6	190	53.96
7	280	79.52	170	48.28	240	68.16

表 3 原型实测值与模型理论值之间的关系

Tab. 3 Relationship between prototype measured value and model theoretical value

时间/d	$\theta=0^{\circ}, \beta=0^{\circ}$ 时应力值/kPa		$\theta=90^{\circ}, \beta=90^{\circ}$ 时应力值/kPa		$\theta=180^{\circ}, \beta=180^{\circ}$ 时应力值/kPa	
	测量 Z	理论 M	测量 Z_1	理论 M_1	测量 Z_2	理论 M_2
1	0	0	0	0	0	0
3	180	180.23	100	101.25	160	164.27
5	230	241.55	150	140.29	190	198.65
7	280	285.36	170	176.98	240	235.78

由图 6(a)可知,模型实测值与原型实测值变形趋势相同,均随着时间增加,且 $\sigma_N/\sigma_M \approx 0.31$;当 1d~3d 时,原型与模型的衬砌应力均随时间大幅增加;当 3d~7d 时,模型与原型衬砌应力虽随时间增加,但变化幅度较小。

由图 6(b)可知,模型理论计算值与原型实测值均随时间增加,且其变化趋势一致,说明模型理论值与原型实测值较为接近,表明该理论方法合理可行;理论值与实测值之间最大误差为 5.02%,最小误差为 0。

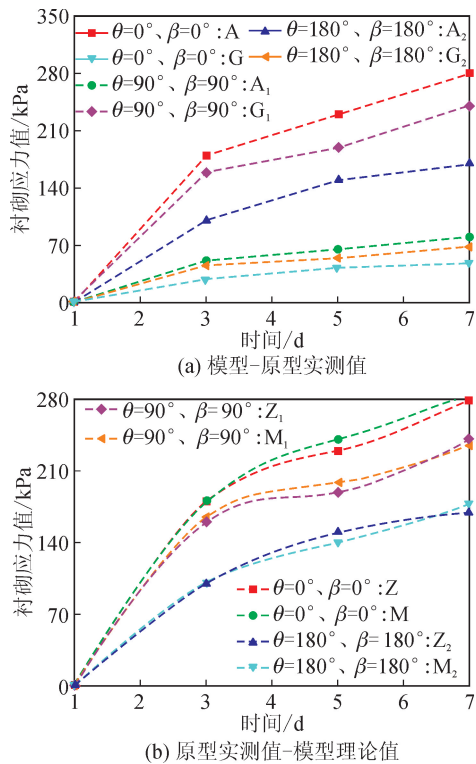


图6 原型-模型衬砌应力示意图

Fig. 6 Schematic diagram of prototype-model lining stress

4 结 论

1) 本文基于相似原理,构建了原型-模型的衬砌应力关系计算模型,其原型衬砌应力与模型衬砌应力之间相差一个常数,此常数可通过相似材料及围岩物理力学参数来确定。

2) 连拱隧道受力较为复杂,采用复变函数保角代换求解模型应力,理论化简得到原型-模型衬砌应力关系,经围岩压力计算可分别得到 q_1 、 q_2 ,从而可通过模型应力反推原型实际衬砌应力。

3) 经模型化简、误差分析可得高应力区模型-原型衬砌应力理论关系,该模型产生的绝对误差较小,最大误差为 5.02%,最小误差为 0。

4) 经分析,原型实测值与模型实测值均随时间增加,其变化趋势一致,且 $\sigma_N/\sigma_M \approx 0.31$;原型实测值与模型理论值较为接近,且均随时间增加。该结果验证了模型的合理性,说明根据模型值反推原型隧道衬砌应力是可行的。

5) 本文未考虑地下水压力、地应力的影响,后续研究会将其纳入考虑,以便分析其对衬砌应力变化的影响。

参考文献:

[1] 薛亚东,高健,李宜城,等. 基于深度学习的地铁隧道衬

砌病害检测模型优化[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2020, 47(7): 137-146.

XUE Yadong, GAO Jian, LI Yicheng, et al. Optimization of shield tunnel lining defect detection model based on deep learning [J]. Journal of Hunan University (Natural Science Edition), 2020, 47(7): 137-146.

[2] 李庆桐,黄宏伟. 基于数字图像的盾构隧道衬砌裂缝病害诊断[J]. 岩石力学与工程学报, 2020, 39(8): 1658-1670.

LI Qingtong, HUANG Hongwei. Diagnosis of structural cracks of shield tunnel lining based on digital images [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2020, 39(8): 1658-1670.

[3] ZHANG W G, ZHONG H Y, XIANG Y Z, et al. Visualization and digitization of model tunnel deformation via transparent soil testing technique[J/OL]. Underground Space, 2020 [2021-3-23]. <https://doi.org/10.1016/j.undsp.2020.05.004>.

[4] XIANG Y Z, LIU H L, ZHANG W G, et al. Application of transparent soil model test and DEM simulation in study of tunnel failure mechanism[J]. Tunnelling and Underground Space Technology, 2018, 74: 178-184.

[5] 仇文岗,王焱,宗梓煦,等. 隧道施工与运营过程中的可靠度分析方法研究[J]. 重庆交通大学学报(自然科学版), 2020, 39(3): 1-13.

ZHANG Wengang, WANG Yan, ZONG Zixu, et al. Reliability analysis methods in tunnel construction and operation [J]. Journal of Chongqing Jiaotong University (Natural Science Edition), 2020, 39(3): 1-13.

[6] 雷明锋,彭立敏,施成华,等. 浅埋偏压隧道衬砌受力特征及破坏机制试验研究[J]. 中南大学学报(自然科学版), 2013, 44(8): 3316-3325.

LEI Mingfeng, PENG Limin, SHI Chenghua, et al. Model research on failure mechanism and lining stress characteristics of shallow buried tunnel under unsymmetrical pressure [J]. Journal of Central South University (Natural Science Edition), 2013, 44(8): 3316-3325.

[7] 邓之友. 浅埋偏压隧道结构荷载反分析研究[D]. 长沙: 中南大学, 2012.

DENG Zhiyou. Back-analysis on the structural load of shallow-buried tunnel [D]. Changsha: Central South University, 2012.

[8] CHEN F Y, WANG L, ZHANG W G, et al. Reliability assessment on stability of tunneling perpendicularly beneath an existing tunnel considering spatial variabilities of rock mass properties [J]. Tunnelling and Underground Space Technology, 2019, 88: 276-289.

[9] ZHANG W G, LI Y Q, WU C Z, et al. Prediction of lining response for twin tunnel constructed in anisotropic

- clays using machine learning techniques[J/OL]. *Underground Space*, 2020[2021-3-23]. <https://doi.org/10.1016/j.undsp.2020.02.007>.
- [10] GOH A T C, ZHANG W G, ZHANG Y M, et al. Determination of earth pressure balance tunnel-related maximum surface settlement: a multivariate adaptive regression splines approach [J]. *Bulletin of Engineering Geology and the Environment*, 2018, 77: 489-500.
- [11] 朱叶艇, 朱雁飞, 张子新, 等. 异形盾构隧道衬砌结构计算模型和受力特征研究[J]. *岩土工程学报*, 2018, 40(7): 1230-1236.
- ZHU Yeting, ZHU Yanfei, ZHANG Zixin, et al. Computational model and mechanical characteristics of linings of special-shaped shield tunnels [J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2018, 40(7): 1230-1236.
- [12] 江浩, 李荣建, 闫蕊, 等. 隧道模型试验中几何比尺相似程度的差异性及其影响比较[J]. *岩土力学*, 2015, 36(S1): 270-276.
- JIANG Hao, LI Rongjian, YAN Rui, et al. Impact of geometry scale similarity levels on tunnel model test and its deductive computational difference [J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2015, 36(S1): 270-276.
- [13] 张鹏. 海底隧道衬砌水压力分布规律和结构受力特征模型试验研究[D]. 北京: 北京交通大学, 2008.
- ZHANG Peng. Model test research on the distribution law of water pressure upon lining and the stress characteristics of lining structure in subject to subsea tunnel [D]. Beijing: Beijing Jiaotong University, 2008.
- [14] 景诗庭. 衬砌结构模型试验[J]. *唐山铁道学院学报*, 1964(4): 47-55.
- [15] 刘金云, 陈健云. 考虑流-固耦合的输水隧道动力模型试验中的一种相似技巧[J]. *岩土力学*, 2008, 29(12): 3387-3392.
- LIU Jinyun, CHEN Jianyun. A similarity technique for water-conveyance tunnel dynamic model test considering fluid-structure coupling [J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2008, 29(12): 3387-3392.
- [16] 袁文忠. 相似理论与静力学模型试验[M]. 成都: 西南交通大学出版社, 1998.
- [17] 苏志平. 材料力学全程辅导(上册)[M]. 浙大·第三版. 北京: 中国建材工业出版社, 2004.
- [18] 顿志林. 弹性力学及其在岩土工程中的应用[M]. 北京: 煤炭工业出版社, 2003.
- [19] 王志良, 申林方, 姚激, 等. 浅埋隧道围岩应力场的计算复变函数求解法[J]. *岩土力学*, 2010, 31(S1): 86-90.
- WANG Zhiliang, SHEN Linfang, YAO Ji, et al. Calculation of stress field in surrounding rock of shallow tunnel using computational function of complex variable method [J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2010, 31(S1): 86-90.
- [20] 曹小林. 半无限空间中隧道横断面应力和位移的复变函数解[D]. 兰州: 兰州理工大学, 2017.
- CAO Xiaolin. Complex variable function method of stress and displacement of tunnel cross section in a half space [D]. Lanzhou: Lanzhou University of Technology, 2017.
- [21] 李岩松, 陈寿根. 基于复变函数理论的非圆形隧道解析解[J]. *西南交通大学学报*, 2020, 55(2): 265-272.
- LI Yansong, CHEN Shougen. Lining and surrounding rock in non-circular tunnel based on complex variable method [J]. *Journal of Southwest Jiaotong University*, 2020, 55(2): 265-272.
- [22] 张民选, 罗贤兵. 数值分析[M]. 南京: 南京大学出版社, 2019.

(责任编辑 周 蓓)