

DOI:10.19322/j.cnki.issn.1006-4710.2021.03.018

# 基于非线性动力学的分数阶直驱式永磁同步发电机建模与性能分析

解 骞<sup>1</sup>, 李佳鑫<sup>1</sup>, 贾业萌<sup>2</sup>, 杨晓萍<sup>1</sup>, 郭 舵<sup>1</sup>

(1. 西安理工大学 电气工程学院, 陕西 西安 710048; 2. 天津大学 建筑工程学院, 天津 300072)

**摘要:** 本文主要研究分数阶直驱式永磁同步风力发电机(分数阶 D-PMSG)的动力学行为,旨在探究不同参数、不同阶数下系统的运动状态及性能特征。首先,利用一个实际的发电机参数,建立 D-PMSG 的分数阶数学模型,同时为了降低系统参数的复杂性,以便对其进行动力学行为分析,本文通过仿射变换的方法,构建了分数阶 D-PMSG 模型的紧凑表达形式。在此基础上,对所构建的分数阶 D-PMSG 在不同阶数、参数下进行数值仿真,得到相应的分岔图、功率谱和相图等,对系统的动力学特性及性能进行分析,同时获得了系统脱离混沌状态时系统参数与阶数之间的关系曲线。这些分析结果可为 D-PMSG 在实际设计、运行及控制方面提供一定的理论基础。

**关键词:** 直驱式永磁同步风力发电机; 分数阶; 非线性动力学; 数学建模; 分岔理论

**中图分类号:** TM341

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1006-4710(2021)03-0441-10

## Modeling and performance analysis of a fractional-order direct-driven permanent magnet synchronous generator based on nonlinear dynamics

XIE Qian<sup>1</sup>, LI Jiixin<sup>1</sup>, JIA Yemeng<sup>2</sup>, YANG Xiaoping<sup>1</sup>, GUO Duo<sup>1</sup>

(1. Faculty of Electrical Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China;

2. School of Civil Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

**Abstract:** This paper mainly studies the dynamic behavior of fractional-order direct-driven permanent magnet synchronous generator (fractional-order D-PMSG), aiming to explore the system's motion state and generator performance characteristics with different parameters and different orders. Firstly, a fractional-order mathematical model of D-PMSG is established by using an actual generator parameter. At the same time, in order to reduce the complexity of system parameters and facilitate the dynamic behavior analysis, the compact expression form of fractional-order D-PMSG model is constructed by affine transformation. On this basis, the fractional-order D-PMSG model is simulated under the condition of different orders and parameters, with the corresponding bifurcation diagram, power spectrum and phase diagram obtained. The dynamic characteristics of the system are analyzed in detail, with the performance characteristics of the system discussed. The relationship between the parameters and the order of the system is obtained when the system is out of chaos. These analytical results can provide a certain theoretical basis for the actual design, operation and control of the D-PMSG.

**Key words:** D-PMSG; fractional order; nonlinear dynamics; mathematical modeling; bifurcation theory

随着我国风力发电产业的迅速发展,直驱式永磁同步风力发电机(D-PMSG)在电网中占有的比例不断升高<sup>[1]</sup>。D-PMSG 采用低速永磁发电机且风

轮与电机直接耦合,这种发电机取消了风力机和发电机之间的增速齿轮箱,具有高效率、低噪声、高寿命等优点<sup>[2,3]</sup>。

收稿日期: 2020-08-03; 网络出版日期: 2021-02-24

网络出版地址: <https://kns.cnki.net/kcms/detail/61.1294.N.20210224.1050.002.html>

基金项目: 陕西省自然科学基金基础研究计划资助项目(2019JQ-726)

第一作者: 解骞,男,博士,讲师,研究方向为复杂网络与非线性系统建模分析及其控制。E-mail: xieq@xaut.edu.cn

当某些参数处于一定工作范围时,系统就会产生不稳定的运行状态,甚至混沌状态<sup>[4]</sup>,具体表现为产生不规则电磁噪声、转速和输出功率间歇性振动等现象<sup>[5]</sup>。目前,国内外已就 D-PMSG 开展了大量研究<sup>[6-8]</sup>,但是这些研究主要基于整数阶 D-PMSG 数学模型<sup>[9]</sup>。相较于整数阶系统,分数阶系统更易稳定,且可以更好地揭示和描述自然现象<sup>[10-12]</sup>,许多系统可以由分数阶微积分恰当地描述。因此,本文基于分数阶 D-PMSG 数学模型,研究其动力学行为,探究参数和阶数变化对系统运动状态的影响机制。

另一方面,在现有的研究中,大多数学者忽略了发电机与电动机的区别,在研究发电机时却使用了电动机的模型,并且采用的都是理论参数,而未采用实际的运行参数进行分析。因此,本文基于笔者先前的研究成果<sup>[13]</sup>,建立一个具有实际参数的 30 kW 分数阶 D-PMSG 模型,使得本文的研究内容更具实际意义。

### 1 分数阶微积分理论

在分数阶微积分理论的发展过程中,许多学者提出了多种不同的分数阶微积分定义,但是主要有 Riemann-Liouville 分数阶微积分定义以及 Caputo 分数阶微积分定义。

1) Riemann-Liouville 分数阶导数定义式为:

$${}_a D_t^q x(t) = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \frac{d^n}{dt^n} \cdot \int_a^t \frac{x(\tau)}{(t-\tau)^{q-n+1}} d\tau \quad (n-1 \leq q < n) \quad (1)$$

式中:  $\Gamma(\cdot)$  表示 Gamma 函数。

当给定的函数  $x(t) = (t-\alpha)^\beta$ , 函数  $(t-\alpha)^\beta$  可积,且  $\beta > -1$  时,由 Riemann-Liouville 给出的分数阶导数的定义为:

$${}_a D_t^q x((t-\alpha)^\beta) = \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(1+\beta-q)} (t-\alpha)^{\beta-q} \quad (2)$$

这里限制  $x(t) = (t-\alpha)^\beta$ ,  $\beta > -1$  且此函数具有可积分性。

2) Caputo 分数阶导数定义式为:

$${}_a D_t^q x(t) = \frac{1}{\Gamma(m-q)} \int_a^t \frac{x^m(\tau)}{(t-\tau)^{q-m+1}} d\tau \quad (3)$$

其中,  $x^m(\tau)$  为函数  $x(\tau)$  的  $m$  阶导数,  $m-1 \leq q \leq m+1$ ,  $m$  为整数。

### 2 分数阶 D-PMSG 数学模型建立

对于 D-PMSG,通常采用  $d-q$  转子坐标系,由此可以得到 D-PMSG 的空间矢量图,如图 1 所示。

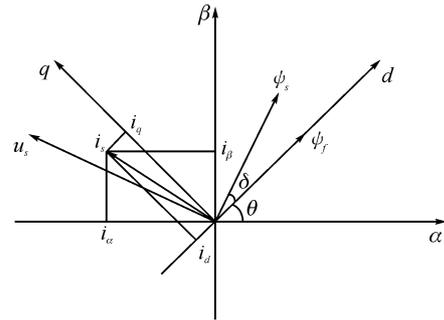


图 1 D-PMSG 的空间矢量图  
Fig. 1 Space vector graph of D-PMSG

从而得到电压方程、磁链方程、转矩方程以及运动方程:

1) 电压方程:

$$\begin{cases} u_d = \frac{d\psi_d}{dt} - \omega_e \psi_q + R i_d \\ u_q = \frac{d\psi_q}{dt} + \omega_e \psi_d + R i_q \end{cases} \quad (4)$$

2) 磁链方程:

$$\begin{cases} \psi_d = L_d i_d + \psi_f \\ \psi_q = L_q i_q \end{cases} \quad (5)$$

3) 转矩方程:

$$T_e = \frac{3}{2} n_p (\psi_d i_q - \psi_q i_d) = \frac{3}{2} n_p [(\psi_f i_q + (L_d - L_q) i_d i_q)] \quad (6)$$

4) 运动方程:

$$J \frac{d\omega}{dt} + b\omega = T_w - T_e \quad (7)$$

由此,D-PMSG 模型可以表示为:

$$\begin{cases} \dot{i}_q = \frac{1}{L_q} (-R i_q - n_p L_d \omega i_d - n_p \psi_f \omega + u_q) \\ \dot{i}_d = \frac{1}{L_d} (-R i_d + n_p L_q \omega i_d + u_d) \\ \dot{\omega} = \frac{1}{J} T_w - \frac{1}{J} \left( \frac{3}{2} n_p \psi_f i_q + \frac{3}{2} n_p (L_d - L_q) i_d i_d \right) - \frac{1}{J} b \omega \end{cases} \quad (8)$$

式(8)中参数的含义,如表 1 所示。

本文采用表贴式结构的 D-PMSG,根据其特性可知  $L_d = L_q$ 。

从式(8)可以看出,D-PMSG 系统代表高度非线性系统,在动态分析过程中将会变得非常复杂。因此,采用仿射变换对式(8)所示的模型进行简化。简单来讲,仿射变换就是“线性变换”加“平移”。一组平行直线经过仿射变换之后依然是直线,且直线的比例保持不变<sup>[14]</sup>。由于其特有的性质,仿射变换在非线性和动力学分析中有着重要作用。

表1 D-PMSG 数学模型参数

Tab.1 Mathematical model parameters of D-PMSG

参数	含义	单位
$R$	定子绕组电阻	$\Omega$
$L_q$	$q$ 轴定子电感	H
$L_d$	$d$ 轴定子电感	H
$u_q$	$q$ 轴定子电压	V
$u_d$	$d$ 轴定子电压	V
$i_q$	$q$ 轴定子电流	A
$i_d$	$d$ 轴定子电流	A
$\psi_q$	$q$ 轴定子磁通	Wb
$\psi_d$	$d$ 轴定子磁通	Wb
$\psi_f$	永磁体磁通	Wb
$T_w$	机械转矩	$N \cdot m$
$T_e$	电磁转矩	$N \cdot m$
$n_p$	极对数	
$\omega$	转子角速度	$rad \cdot s^{-1}$
$\omega_e$	电角频率	$rad \cdot s^{-1}$
$b$	黏性阻尼系数	$N \cdot m \cdot (rad/s)^{-1}$
$J$	转动惯量	$kg \cdot m^2$

下面考虑仿射变换的形式:

$$\mathbf{x} = \mathbf{M}\hat{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\xi} \quad (9)$$

由此,可以得到以下两种变换:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{M} \frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} \quad (10)$$

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{N} \frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad (11)$$

定理 1<sup>[13]</sup>: 对于一个三维动态系统:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(\mathbf{x}) \quad (12)$$

定义:  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T = [i_q, i_d, \omega]^T$ ,  $\hat{\mathbf{x}} = [\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3]^T = [\hat{i}_q, \hat{i}_d, \hat{\omega}]^T$ ,  $\boldsymbol{\xi} = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]^T$ ,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}, \mathbf{N} = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 \end{bmatrix}, \lambda_1 =$$

$$\lambda_3 = 0, \lambda_2 = m_2 \psi_f - \frac{\psi_f}{L_d}, m_1 = \frac{1}{bR^2 n_1}, m_2 = \frac{1}{bR^2 n_2},$$

$$m_3 = \frac{1}{bR n_2}, n_1 = \frac{L_q}{R}, n_2 = \frac{L_d}{R}, n_3 = \frac{2b^2}{3J}.$$

将已知条件代入式(8),可以得到:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_q \\ \dot{i}_d \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{bR^2 n_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{bR^2 n_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{bR n_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{i}_q \\ \hat{i}_d \\ \hat{\omega} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ m_2 \psi_f - \frac{\psi_f}{L_d} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\hat{i}_q}{bR^2 n_1} \\ \frac{\hat{i}_d}{bR^2 n_2} + m_2 \psi_f - \frac{\psi_f}{L_d} \\ \frac{\hat{\omega}}{bR n_2} \end{bmatrix} \quad (13)$$

利用式(10)、式(11)以及定理 1,可得简化后的数学模型:

$$\begin{cases} \dot{\hat{i}}_q = -\hat{i}_q - \mu \hat{\omega} \hat{i}_d - \mu \psi_f \hat{\omega} + \hat{u}_q \\ \dot{\hat{i}}_d = -\hat{i}_d + \mu \hat{\omega} \hat{i}_q + \hat{u}_d \\ \dot{\hat{\omega}} = \hat{T}_w - \mathcal{D}(\mu \psi_f \hat{i}_q + \frac{2}{3} \hat{\omega}) \end{cases} \quad (14)$$

其中:

$$\mu = \frac{n_p}{bR} \quad (15)$$

$$\mathcal{D} = \frac{3bn_3}{2J} \quad (16)$$

$$\hat{u}_q = \frac{u_q}{Rm_1} \quad (17)$$

$$\hat{u}_d = \frac{u_d - R\lambda_2}{Rm_2} \quad (18)$$

$$\hat{T}_w = \frac{3n_3}{2Jm_3} T_w \quad (19)$$

在发电机设计时,发电机的状态为空载运行,因此,外部输入转矩可以不作为发电机设计的重要参数。在建模时以  $t = 0$  为初始时间,考虑  $\hat{u}_d = \hat{u}_q = \hat{T}_w = 0$  时,模型(14)可简化为:

$$\begin{cases} \dot{\hat{i}}_q = -\hat{i}_q - \mu \hat{\omega} \hat{i}_d - \mu \psi_f \hat{\omega} \\ \dot{\hat{i}}_d = -\hat{i}_d + \mu \hat{\omega} \hat{i}_q \\ \dot{\hat{\omega}} = -\mathcal{D}(\mu \psi_f \hat{i}_q + \frac{2}{3} \hat{\omega}) \end{cases} \quad (20)$$

由此可以得到分数阶 D-PMSG 的数学模型:

$$\begin{cases} \frac{d^{q_1} \hat{i}_q}{dt^{q_1}} = -\hat{i}_q - \mu \hat{\omega} \hat{i}_d - \mu \psi_f \hat{\omega} \\ \frac{d^{q_2} \hat{i}_d}{dt^{q_2}} = -\hat{i}_d + \mu \hat{\omega} \hat{i}_q \\ \frac{d^{q_3} \hat{\omega}}{dt^{q_3}} = -\mathcal{D}(\mu \psi_f \hat{i}_q + \frac{2}{3} \hat{\omega}) \end{cases} \quad (21)$$

D-PMSG 的风力发电机组主要由风力机和 D-PMSG 两部分组成,风力机将风能转化为机械能,带动 D-PMSG 转子旋转,从而产生电能。D-PMSG 的基本框图如图 2 所示。

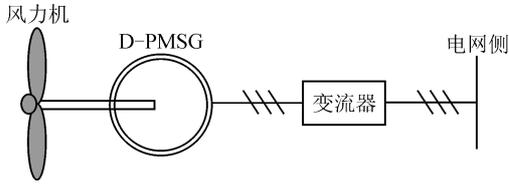


图 2 D-PMSG 的基本框图  
Fig. 2 Basic block diagram of D-PMSG

### 3 分数阶 D-PMSG 非线性动力学及性能分析

分数阶 D-PMSG 数学模型为非线性系统,具有复杂的动力学行为。然而当 D-PMSG 的参数发生变化时,可能会出现一些不稳定运动状态,这将严重影响其工作稳定性,降低甚至破坏发电机的性能,限制众多机电设备的工作范围。非线性分析方法是研究系统动力学行为最重要的方法。下面将在不同情况下对系统进行数值仿真,并分析其动力学行为。

#### 3.1 当参数 $\vartheta$ 变化时

取一组参数  $\mu = 3$ 、 $\psi_f = 2.5$ ,初始参数选择为  $[0.1, 0.1, 0.1]$ ,分岔参数  $\vartheta \in (0, 35)$ 。

当  $q_1 = q_2 = q_3 = 1.03$  时,  $\hat{i}_q$  与  $\vartheta$  的分岔图如图 3(a)所示,该图按蓝、黄、红不同颜色分为三个部分,分岔图分别用相应的颜色进行绘制,如图 3(b)~(d)。

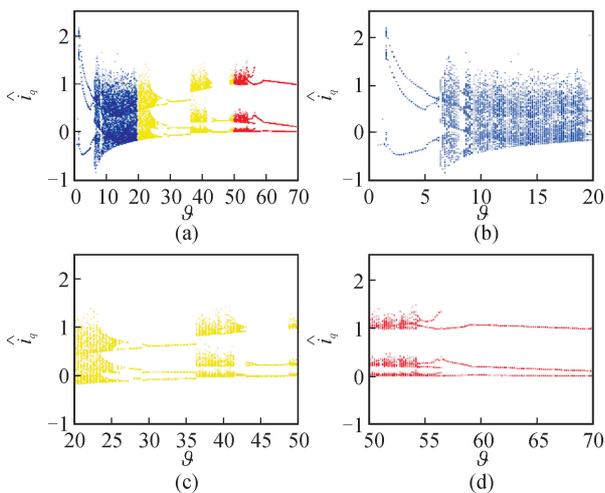


图 3  $q_1 = q_2 = q_3 = 1.03$  时  $\hat{i}_q$  与  $\vartheta$  的分岔图  
Fig. 3 Bifurcation diagrams of  $\hat{i}_q$  versus  $\vartheta$ ,  
 $q_1 = q_2 = q_3 = 1.03$

从图 3(a)中可以看出,随着  $\vartheta$  的变化,系统在大多数情况下为混沌状态。当参数逐渐增加时,系

统最终通过一系列分岔行为摆脱混沌状态。

图 3(b)~(d)描绘了分岔图(图 3(a))中更多的动力学行为细节。图 3(b)描述了图 3(a)中参数  $\vartheta \in [0, 20]$  区间上的分岔图,图中发现了霍普分岔。当  $\vartheta = 1.5$  时,系统开始失去稳定状态,发电机运行性能也开始降低。在  $\vartheta \in (1.5, 6.6)$  范围内,系统有三个周期。当分岔参数  $\vartheta = 6.6$  时,系统出现了倍周期分岔,由周期运动进入了混沌状态。之后在混沌区中,出现了两个周期窗口,此时发电机会产生剧烈振荡、机组过热等现象,使系统无法正常工作,甚至造成损坏。

图 3(c)描述了图 3(a)中参数  $\vartheta \in [20, 50]$  区间上的分岔图,能够观察到两个明显的周期窗口。在这里可以观察到逆分岔,吸引子合并激变和内部激变;当  $\vartheta = 25.27$  和  $\vartheta = 42.72$  时发生逆分岔;在  $\vartheta = 38$  附近,系统会出现合并激变和内部激变。

图 3(d)描述了图 3(a)中参数  $\vartheta \in [50, 70]$  区间上的分岔,系统在该区间内大多为周期运动。随着分岔参数  $\vartheta$  的增大,在经历了一个短的混沌区之后,当  $\vartheta > 42.72$  时,系统开始摆脱混沌状态,进入周期运动。

在保持  $q_3 = 1.03$  的基础上,改变阶数  $q_1$  和  $q_2$ ,在图 4 中绘制了更多  $\hat{i}_q$  与  $\vartheta$  的分岔图。

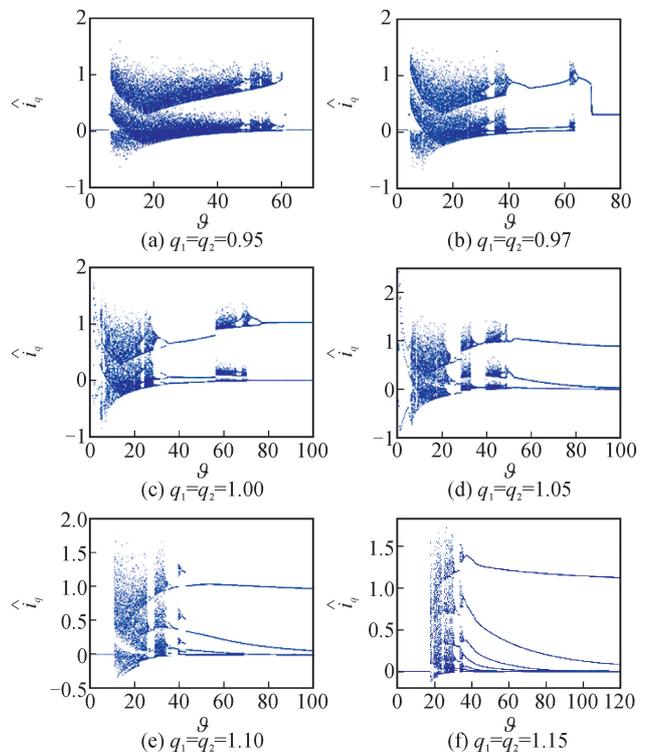


图 4 系统阶数  $q_3 = 1.03$ 、 $q_1$  与  $q_2$  变化时,  $\hat{i}_q$  与  $\vartheta$  的分岔图

Fig. 4 Bifurcation diagrams of  $\hat{i}_q$  versus  $\vartheta$  with different system orders ( $q_1, q_2$ ) and  $q_3 = 1.03$

比较这些分岔图可以发现,不同阶数的系统都经历了分岔和周期窗口。另一方面,系统的阶数确实能对系统的混沌以及分岔行为产生影响。

当  $q_1 = q_2 = 0.95$ ,  $q_3 = 1.03$  时,系统的分岔图如图 4(a)所示。随着分岔参数  $\vartheta$  的增大,当  $\vartheta = 6.62$  时,系统突然变得混沌。然后,系统在一个大范围内保持混沌状态。当  $\vartheta = 47.13$  时,出现了一个明显的周期窗口。直到  $\vartheta = 56.96$ ,系统保持稳定。

与图 4(a)相比,图 4(b)中多了一个大的周期窗口。随着分岔参数  $\vartheta$  的增大,当  $\vartheta = 3.75$  时,系统突然变得混沌,在  $\vartheta \in (35.52, 39.06)$  范围内,存在一个短的混沌区,之后经历一个大的周期窗口和一个短的混沌区后,系统再次保持稳定。

在图 4(c)中,同样有一个很大的周期窗口。随着分岔参数  $\vartheta$  的增大,当  $\vartheta = 2.00$  时,系统突然变得混沌。此外,还可以明显观察到,在  $\vartheta = 30$  和  $\vartheta = 70$  附近,系统出现逆分岔。

在图 4(d)~(f)中,系统经历了混沌和许多小的周期窗口,最终通过一系列的分岔行为摆脱混沌。

当  $\vartheta = 29.2$  时,在图 5 中绘制了具有不同系统阶数的  $i_q$ - $i_d$  相图,从不同的角度描述了系统的动力学行为,与系统分岔图相对应。

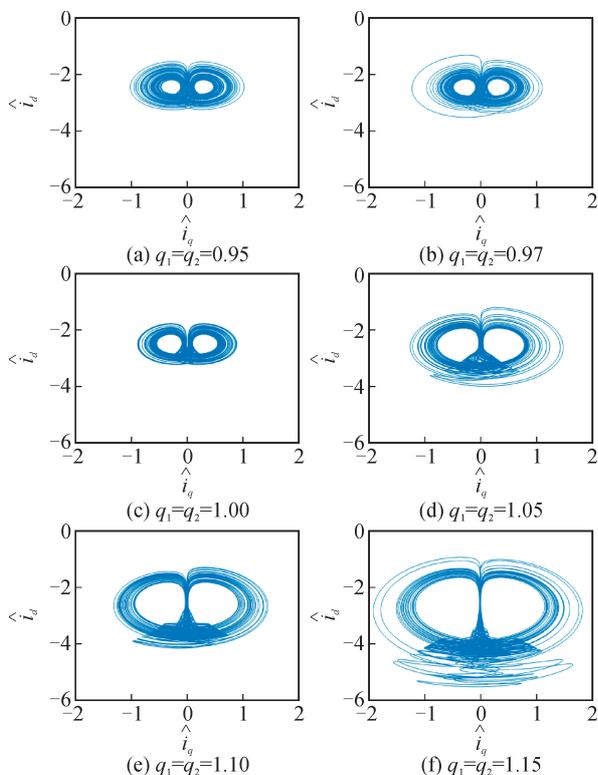


图 5 系统参数  $\vartheta = 29.2$ , 阶数  $q_3 = 1.03$ 、 $q_1$  与  $q_2$  变化时的  $i_q$ - $i_d$  相图

Fig. 5  $i_q$ - $i_d$  phase graphs with different system orders ( $q_1$ ,  $q_2$ ) and  $q_3 = 1.03$ ,  $\vartheta = 29.2$

此时,随着阶数的增加,相图中一直呈现出混沌吸引子,表明系统处于混沌状态。这时,发电机出现剧烈振荡,不能正常运行,并且还会影响周边设备的正常运行。从图中可以看出,当系统阶数增加时,吸引子不仅改变了大小,而且改变了形状。例如,图 5(f)中的吸引子比其他吸引子大,并且形状也与其他吸引子大不相同。

图 6 绘制了  $\vartheta = 75$  时不同系统阶数的  $i_q$ - $i_d$  相图。从图中可以看出,当  $q_1$ 、 $q_2$  从 0.95 增加到 0.97 时,系统的轨迹最终都收敛于一点,表明系统处于稳定状态,此时发电机具有良好的性能,有着比较稳定的输出电压。当  $q_1$ 、 $q_2$  从 1.00 增加到 1.15 时,相图中呈现出极限环,表明系统此时处于周期运动。当发电机系统处于周期振荡时,会对发电机的正常工作造成影响,使其产生转速波动等现象,从而无法满足额定输出电压、频率等要求。此外,随着  $q_1$ 、 $q_2$  的增大,系统运动轨迹也会变大,例如图 6(f)中的轨迹比图 6(d)中的轨迹大。

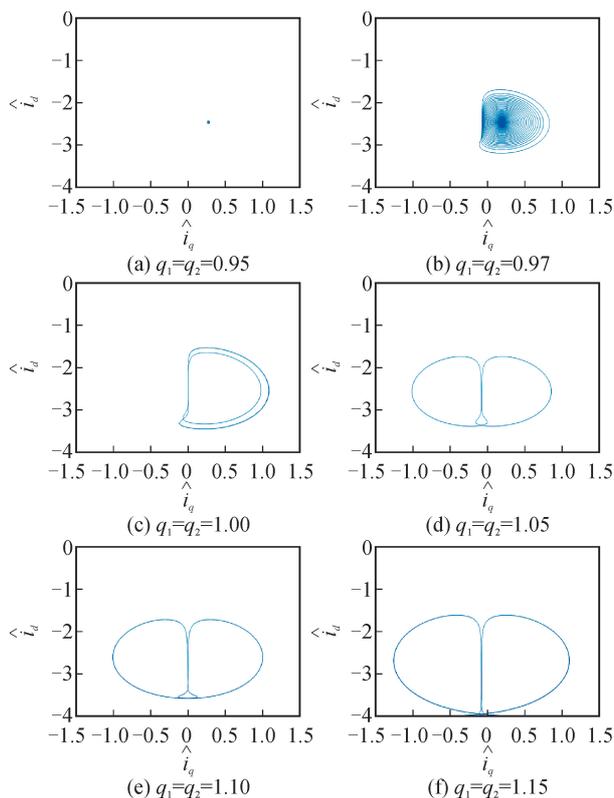


图 6 系统参数  $\vartheta = 75$ , 阶数  $q_3 = 1.03$ 、 $q_1$  与  $q_2$  变化时的  $i_q$ - $i_d$  相图

Fig. 6  $i_q$ - $i_d$  phase graphs with different system orders ( $q_1$ ,  $q_2$ ) and  $q_3 = 1.03$ ,  $\vartheta = 75$

图 5 和图 6 中相图对应的功率谱密度 (PSD) 图分别示于图 7 和图 8 中,其与分析结果一致。

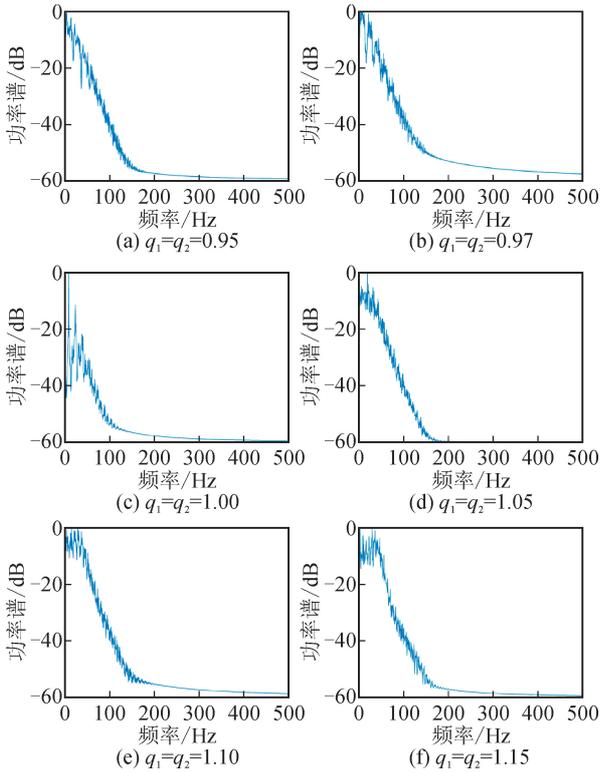


图 7 系统参数  $\vartheta = 29.2$ , 阶数  $q_3 = 1.03$ 、 $q_1$  与  $q_2$  变化时的功率谱图

Fig. 7 PSD diagrams with different system orders ( $q_1, q_2$ ) and  $q_3 = 1.03, \vartheta = 29.2$

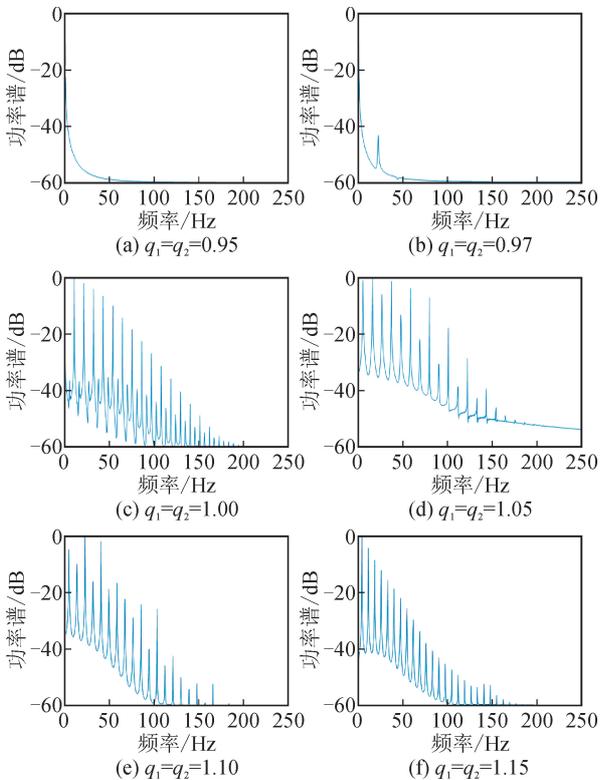


图 8 系统参数  $\vartheta = 75$ , 阶数  $q_3 = 1.03$ 、 $q_1$  与  $q_2$  变化时的功率谱图

Fig. 8 PSD diagrams with different system orders ( $q_1, q_2$ ) and  $q_3 = 1.03, \vartheta = 75$

分析所有的分岔图可以发现,当参数  $\vartheta$  变化时,总能找到一个区间范围,使得系统处于稳定状态。这为发电机的设计提供了理论上的帮助。例如,当  $q_1 = q_2 = q_3 = 1.03$  时,系统在  $\vartheta \in (0, 1.5)$  范围内是稳定的。结合式(16),只要在设计时选取合适的黏性阻尼系数  $b$ 、转动惯量  $J$ ,就可以使发电机稳定运行,保持较好的性能。

图 9 给出了  $\vartheta_c$  与系统阶数  $q$  之间的关系。 $\vartheta_c$  表示混沌结束时的  $\vartheta$ ,  $q$  表示  $q_1, q_2$ , 其中  $q_1 = q_2$ 。从图中可以看出,  $\vartheta_c$  与系统阶数  $q$  之间的关系比较复杂。当  $q$  从 0.95 增加到 1 时,  $\vartheta_c$  逐渐增大;但当  $q$  继续从 1 增加到 1.15 时,  $\vartheta_c$  开始减小,特别是在  $q \in [1, 1.05]$  范围内,  $\vartheta_c$  下降较快。

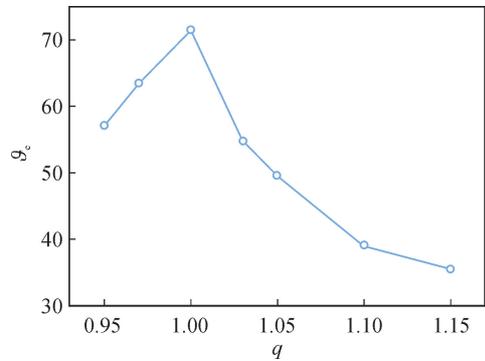


图 9  $\vartheta_c$  与系统阶数  $q$  之间的关系  
Fig. 9  $\vartheta_c$  versus system order  $q$

### 3.2 当参数 $\mu$ 变化时

取一组参数  $\vartheta = 9.8, \psi_f = 4.2$ , 初始参数选择为  $[0.1, 0.1, 0.1]$ , 分岔参数  $\mu \in (0, 4)$ 。

当  $q_1 = q_2 = q_3 = 1.03$  时,  $\hat{i}_q$  与  $\mu$  的分岔图如图 10(a) 所示, 该图按蓝、黄、红不同颜色分为三个部分, 分岔图分别用相应的颜色进行绘制, 如图 10(b)~(d)。由图 10(a) 可以看出, 在参数  $\mu$  的较大区间内, 系统处于混沌状态, 但最终经历一系列分岔回到稳定状态。

图 10(b) 描述了图 10(a) 中参数  $\mu \in [0, 1.5]$  区间上的分岔图。当分岔参数  $\mu = 0.36$  时, 系统开始失去稳定, 当分岔参数  $\mu = 0.56$  时, 系统突然进入混沌, 之后一直处于混沌状态。当系统处于混沌状态时, 发电机会出现剧烈振荡, 不能正常工作, 严重时甚至损坏电机, 产生事故。

图 10(c) 描述了图 10(a) 中参数  $\mu \in [1.5, 2.4]$  区间上的分岔图, 在图中出现了一个周期窗口。从  $\mu = 1.5$  开始, 系统处于混沌状态, 之后经历分岔, 当  $\mu = 2.05$  时, 系统再次进入混沌状态。在该图中, 可以发现吸引子内部激变和合并激变。

图 10(d) 描述了图 10(a) 中参数  $\mu \in [2.4, 4]$

区间上的分岔图。图中可以观察到明显的分岔行为,当 $\mu = 2.55$ 时,发生逆分岔,当 $\mu = 3.32$ 时,系统再次达到稳定状态。

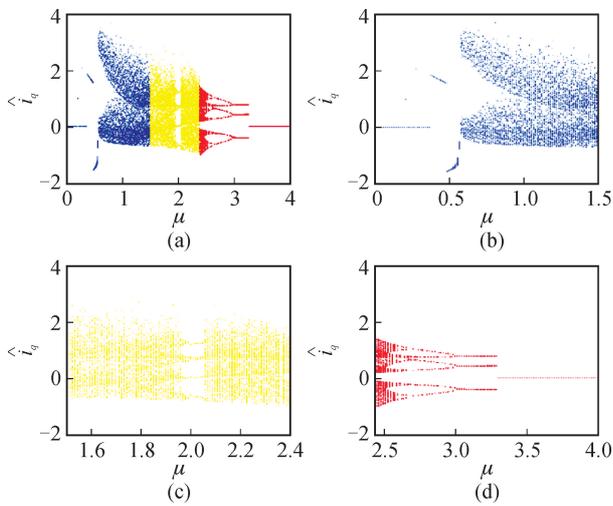


图 10  $q_1 = q_2 = q_3 = 1.03$  时  $\hat{i}_q$  与  $\mu$  的分岔图  
Fig. 10 Bifurcation diagrams of  $\hat{i}_q$  versus  $\mu$ ,  
 $q_1 = q_2 = q_3 = 1.03$

在保持  $q_3 = 1.03$  的基础上,改变阶数  $q_1$  和  $q_2$ ,在图 11 中绘制了更多  $\hat{i}_q$  与  $\mu$  的分岔图。通过比较发现,系统的阶数对系统的混沌和分岔行为也有一定的影响。

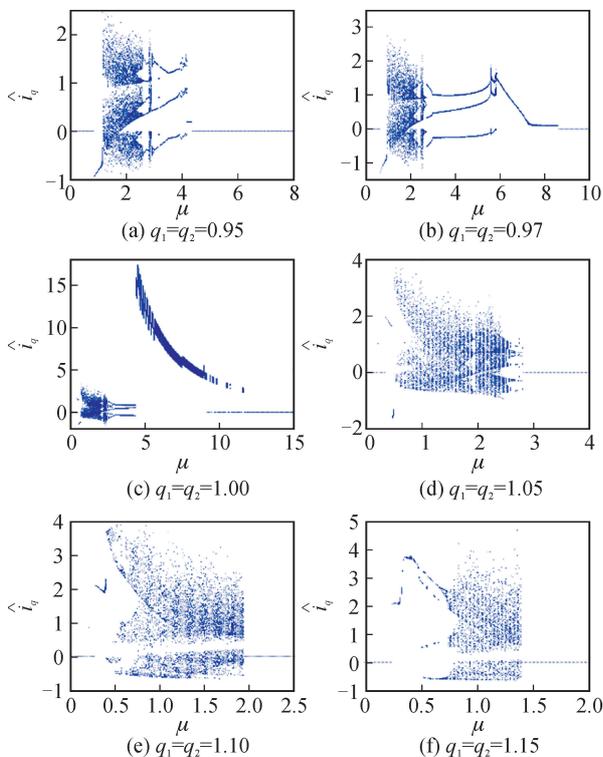


图 11 系统阶数  $q_3 = 1.03$ 、 $q_1$  与  $q_2$  变化时,  
 $\hat{i}_q$  与  $\mu$  的分岔图

Fig. 11 Bifurcation diagrams of  $\hat{i}_q$  versus  $\mu$   
with different system orders ( $q_1, q_2$ ) and  $q_3 = 1.03$

从图 11(a)~(f)中可以看出,当 $\mu$ 到达一定值时,系统会突然进入混沌,这在系统阶数  $q_1$ 、 $q_2$  不同时表现得有所不同。虽然系统的阶数有所不同,但是系统在经历了一系列分岔、混沌之后,最终都回到稳定状态,并且在图 11(a)~(c)中都出现了吸引子内部激变和合并激变,而在图 11(f)中存在霍普分岔。

图 12 绘制了  $\mu = 1$  时不同系统阶数的  $\hat{i}_q$ - $\hat{i}_d$  相图。由相图可知,当  $q_1$ 、 $q_2$  为 0.95 时,相图呈现出一个规则的圆形,并向圆心收缩,表明系统是稳定的,发电机此时能保持较好的性能,维持稳定的输出电压。随着阶数的增加,系统进入混沌状态。进入混沌状态之后,发电机将产生剧烈振荡,不能正常工作。随着阶数的继续增加,吸引子不仅大小发生了变化,而且形状也发生了变化。例如,图 12(f)中的吸引子比其他吸引子大,并且形状与其他吸引子大不相同。这与图 5 中的动力学行为相似。

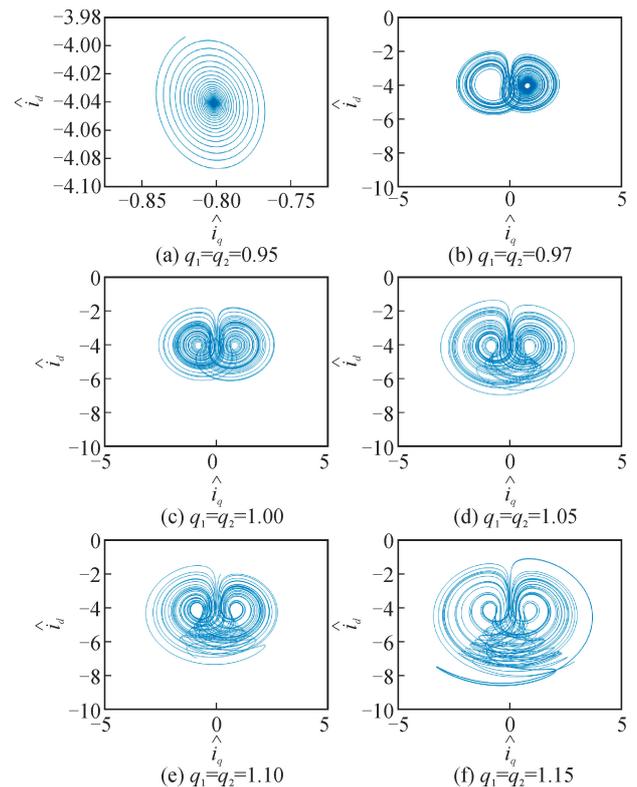


图 12 系统参数  $\mu = 1$ 、阶数  $q_3 = 1.03$ 、  
 $q_1$  与  $q_2$  变化时的  $\hat{i}_q$ - $\hat{i}_d$  相图

Fig. 12  $\hat{i}_q$ - $\hat{i}_d$  phase graphs with different system  
orders ( $q_1, q_2$ ) and  $q_3 = 1.03, \mu = 1$

当  $\mu = 0.6$  时,不同系统阶数的  $\hat{i}_q$ - $\hat{i}_d$  相图如图 13 所示。从图中可以看出,当  $q_1 = q_2 = 0.95$  时,系统的轨迹收敛于一点,系统此时处于稳定状态。当  $q_1$ 、 $q_2$  从 0.97 增加到 1 时,相图中呈现一个圆形,并逐渐向圆心收敛,此时系统也处于稳定状态,这时

发电机具有良好的性能,能产生稳定的输出电压及输出频率。当  $q_1 = q_2 = 1.05$  时,相图中呈现混沌吸引子,系统处于混沌状态,此时发电机将不能正常工作。当  $q_1 = q_2 = 1.10$  时,相图中呈现二维环面,系统此时处于拟周期运动,相较于系统处于周期振荡状态,此时发电机的振荡会更加剧烈,从而产生机组过热等不良现象。当  $q_1 = q_2 = 1.15$  时,相图中呈现出极限环,表明系统处于周期运动,此时发电机有着轻微的振荡,发电机性能会受到小的干扰。从上述讨论可以看出,尽管是相同的系统参数,但是随着系统阶数的增加,系统的动力学行为会发生变化,发电机的运行性能也会随之变化。

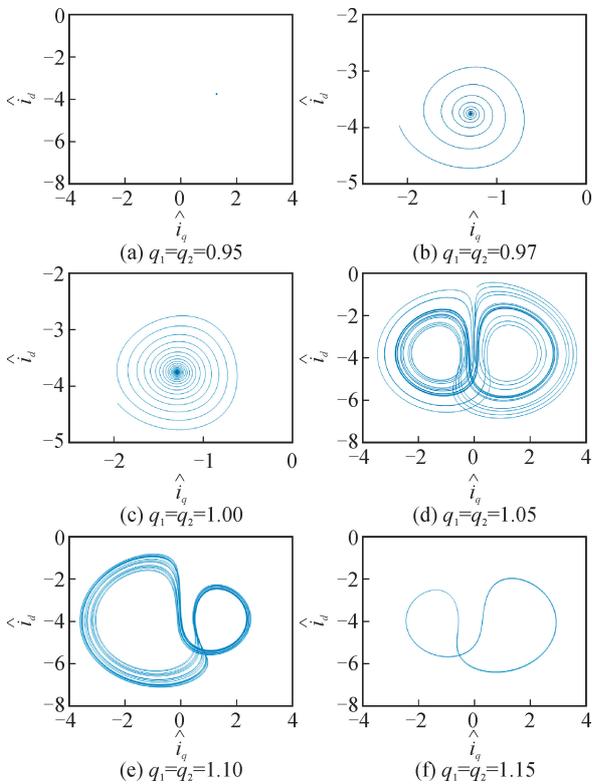


图 13 系统参数  $\mu = 0.6$ , 阶数  $q_3 = 1.03$ 、 $q_1$  与  $q_2$  变化时的  $\hat{i}_q-\hat{i}_d$  相图  
Fig. 13  $\hat{i}_q-\hat{i}_d$  phase graphs with different system orders ( $q_1, q_2$ ) and  $q_3 = 1.03, \mu = 0.6$

图 12 和图 13 对应的 PSD 图如图 14 和图 15 所示,与分析结果一致。

分析所有的分岔图可以发现,当参数  $\mu$  变化时,总能找到一个区间范围,使得系统处于稳定状态。这为发电机的设计提供了理论上的帮助。例如,当  $q_1 = q_2 = q_3 = 1.03$  时,系统在  $\mu \in (0, 0.36)$  及  $\mu > 3.2$  范围内是稳定的。结合式(15),只要在设计时选取合适的极对数  $n_p$ 、黏性阻尼系数  $b$  和定子绕组电阻  $R$ ,就可以使发电机稳定运行,保持较好的性能。

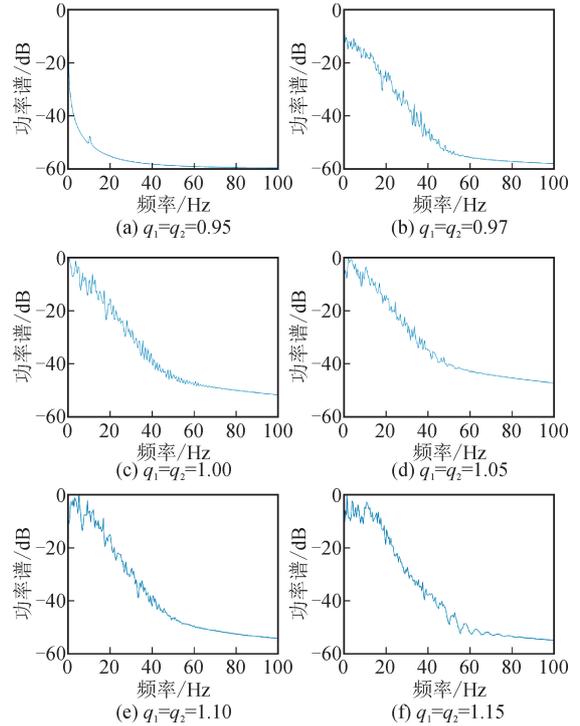


图 14 系统参数  $\mu = 1$ , 阶数  $q_3 = 1.03$ 、 $q_1$  与  $q_2$  变化时的功率谱图  
Fig. 14 PSD diagrams with different system orders ( $q_1, q_2$ ) and  $q_3 = 1.03, \mu = 1$

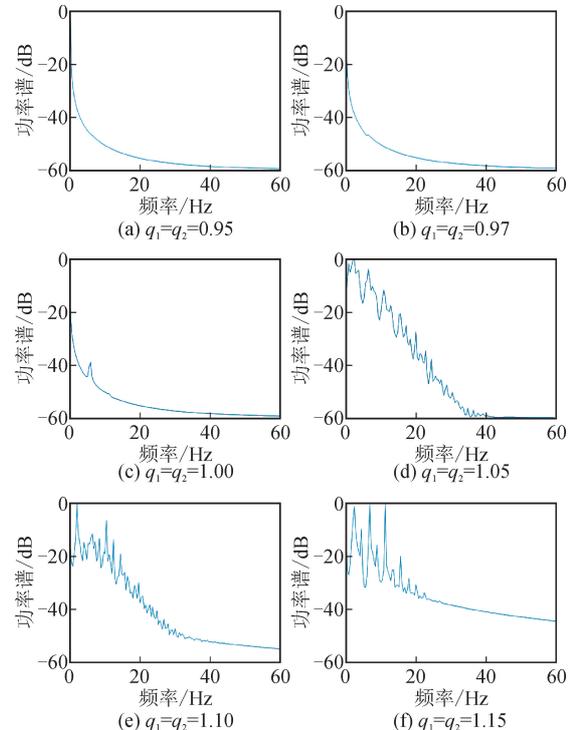


图 15 系统参数  $\mu = 0.6$ , 阶数  $q_3 = 1.03$ 、 $q_1$  与  $q_2$  变化时的功率谱图  
Fig. 15 PSD diagrams with different system orders ( $q_1, q_2$ ) and  $q_3 = 1.03, \mu = 0.6$

图 16 给出了  $\mu_c$  与系统阶数  $q$  之间的关系。 $\mu_c$  表示混沌结束时的  $\mu$ ,  $q$  表示  $q_1, q_2$ , 其中  $q_1 = q_2$ 。

从图 16 中可以看出,  $\mu_e$  与系统阶数  $q$  之间的关系比较复杂。当  $q$  从 0.95 增加到 1 时,  $\mu_e$  逐渐增大, 但当  $q$  增加到 1 之后,  $\mu_e$  突然减小; 当  $q \in [1.03, 1.05]$  时,  $\mu_e$  缓慢增大, 但当  $q \in (1.05, 1.15]$  时,  $\mu_e$  依然随着  $q$  的增加而减小。

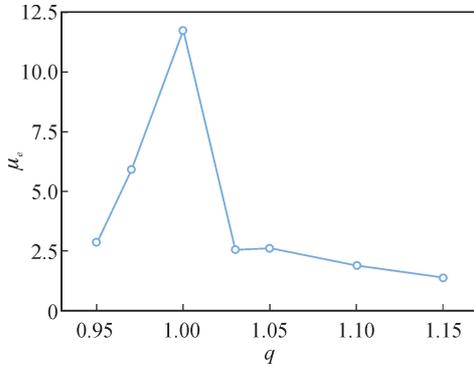


图 16  $\mu_e$  与系统阶数  $q$  之间的关系  
Fig. 16  $\mu_e$  versus system order  $q$

### 3.3 当参数 $\mu$ 、 $\vartheta$ 、 $\psi_f$ 固定, 系统阶数变化时

取一组参数  $\mu = 0.6$ 、 $\vartheta = 6.3776$ 、 $\psi_f = 3$ , 初始参数选择为  $[0.1, 0.1, 0.1]$ 。

图 17 绘制了不同系统阶数的  $\hat{i}_q$ - $\hat{i}_d$  相图, 从阶数变化的角度描述了系统的动力学行为。

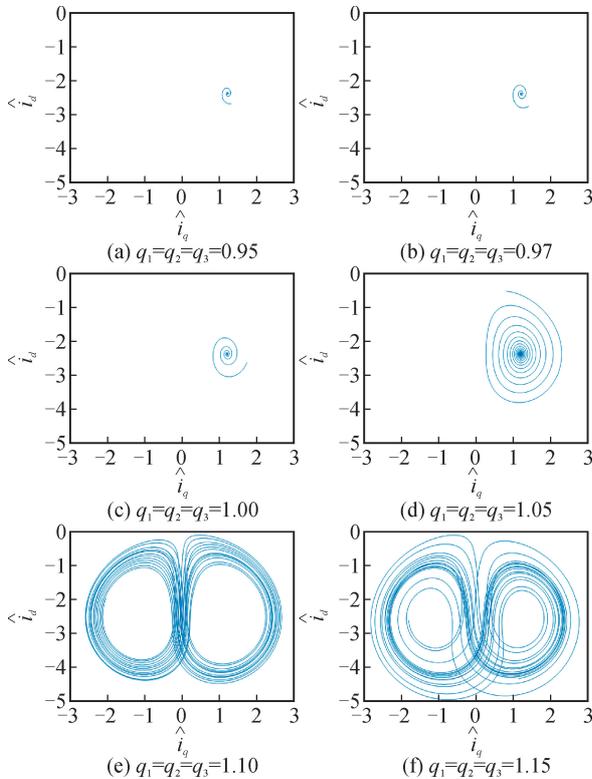


图 17 系统参数  $\mu = 0.6$ 、 $\vartheta = 6.3776$ 、 $\psi_f = 3$ , 阶数  $q_1$ 、 $q_2$  与  $q_3$  变化时的  $\hat{i}_q$ - $\hat{i}_d$  相图  
Fig. 17  $\hat{i}_q$ - $\hat{i}_d$  phase graphs with different system orders ( $q_1, q_2, q_3$ ) and  $\mu = 0.6$ ,  $\vartheta = 6.3776$ ,  $\psi_f = 3$

从图 17(a)~(d)中可以看出, 当系统阶数为 0.95、0.97、1.10 和 1.05 时, 随着阶数的增加, 相图中一直呈现出规则的圆, 并不断向中心运动, 表明系统可以运行到稳定状态。此时发电机运行性能良好, 输出电压幅值和频率都较为稳定。但当系统阶数增加到  $q_1 = q_2 = q_3 = 1.10$  及  $q_1 = q_2 = q_3 = 1.15$  时, 相图中呈现出混沌吸引子, 如图 17(e)、(f), 表明系统处于混沌状态。此时发电机不能正常运行, 会出现剧烈振荡。

图 17 中相图对应的 PSD 图示于图 18 中, 与分析结果一致。

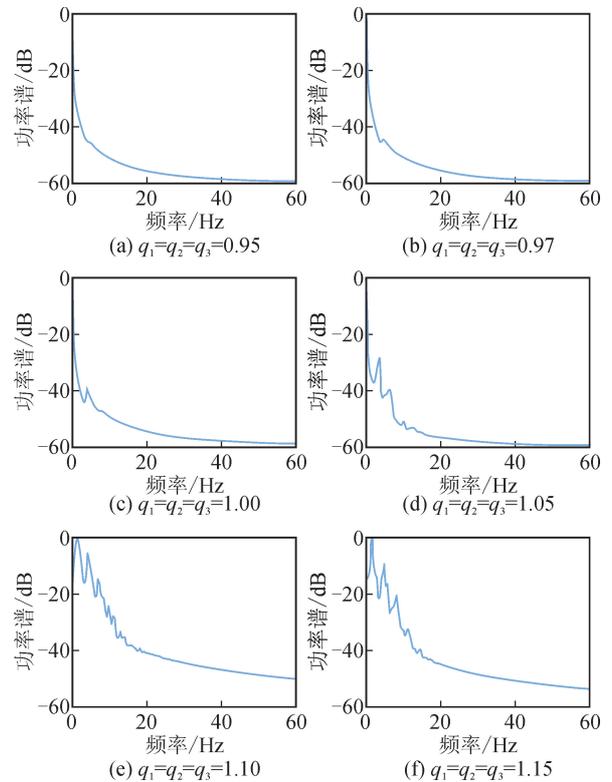


图 18 系统参数  $\mu = 0.6$ 、 $\vartheta = 6.3776$ 、 $\psi_f = 3$ , 阶数  $q_1$ 、 $q_2$  与  $q_3$  变化时的功率谱图

Fig. 18 PSD diagrams with different system orders ( $q_1, q_2, q_3$ ) and  $\mu = 0.6$ ,  $\vartheta = 6.3776$ ,  $\psi_f = 3$

## 4 结论

本文根据一个实际的 D-PMSG 模型, 采用仿射变换的方法, 建立了分数阶 D-PMSG 新的紧凑方程式 (21), 并且通过非线性动力学理论以及分数阶理论, 分析了分数阶 D-PMSG 系统中不同参数、不同系统阶数变化时的影响。

由本文分析可知: 第一, 在不同系统阶数下, D-PMSG 会有不同的动力学行为, 系统的运动状态也会随之改变; 第二, 混沌吸引子的形状和大小也都会随分岔参数  $\vartheta$  和  $\mu$  的变化而变化; 第三, 在参数  $\mu$

变化,阶数  $q_1 = q_2 = q_3 = 1.03$  时,系统较其他阶数具有较大的稳定区间:  $\vartheta = 9.8$ ,  $\phi_f = 4.2$  时,系统在  $0 < \mu < 0.36$  和  $\mu > 3.2$  范围内是稳定的;第四,结合本文对分数阶系统动力学行为的分析,相较于笔者先前对整数阶系统的研究,可以发现分数阶系统在单参数变化、阶数  $q_1 = q_2 = q_3 = 1.03$  时,系统的稳定区间更大,使得满足发电机稳定运行时可供选择的系统参数范围更广;且当系统参数固定时,随着阶数的增加,系统逐渐进入混沌状态;第五,得到发电机稳定运行的区间,在发电机设计时,可以选取合适的实际参数,保证发电机获得更可靠、更良好的性能;第六,得到参数  $\vartheta$  和  $\mu$  变化时,系统脱离混沌时相应的系统参数与阶数  $q$  之间的关系曲线,这对在其他阶数下获得系统的稳定区间具有重要意义。

本研究中采用的实际 D-PMSG 参数、建立的数学模型,相较于其他研究更具有实际意义。此外,本文的研究对进一步探索 D-PMSG 及其他分数阶系统的动力学特性具有一定的参考价值。

#### 参考文献:

- [1] 李宏伟,任凯德,李帅兵,等. 新型风电机组并网电压的稳定性分析[J]. 兰州交通大学学报, 2020, 39(3): 54-59.  
LI Hongwei, REN Kaide, LI Shuaibing, et al. Bifurcation analysis of grid connected voltage stability with new wind turbine[J]. Journal of Lanzhou Jiaotong University, 2020, 39(3): 54-59.
- [2] WEI Qiang, WANG Xingyuan. Chaos controlling of permanent magnet synchronous motor base on dither signal[J]. Journal of Vibration and Control, 2013, 19(16): 2541-2550.
- [3] LI Yang, HUANG Tianming, LI Deng, et al. Analysis on chaotic mechanism of direct-drive permanent magnet synchronous generators based on Lyapunov stability theory[J]. International Information and Engineering Technology Association, 2019, 21(6): 531-537.
- [4] WU Zhongqiang. The fault diagnosis for PMSG under chaos conditions: an LMI approach[J]. Acta Physica Sinica, 2013, 62(15): 150507.
- [5] YANG Guoliang. Slidingmode variable-structure control of chaos in direct-driven permanent magnet synchronous generators for wind turbines[J]. Acta Physica Sinica, 2009, 58(11): 7552-7557.
- [6] CARDENAS R, PENA R, ALEPUZ S. et al. Overview of control systems for the operation of DFIGs in wind energy applications[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2013, 60(7): 2776-2798.
- [7] LEE J, MULJADI E, SORENSEN P, et al. Releasable kinetic energy-based inertial control of a DFIG wind power plant[J]. IEEE Transactions on Sustainable Energy, 2016, 7(1): 279-288.
- [8] MECHTER A, KEMIH K, GHANES M. Backstepping control of a wind turbine for low wind speeds[J]. Nonlinear Dynamics, 2016, 84(4): 2435-2445.
- [9] SI Gangquan, ZHU Jianwei, DIAO Lijie. Modeling, nonlinear dynamic analysis and control of fractional PMDG of wind turbine[J]. Nonlinear Dynamics, 2017, 88: 985-1000.
- [10] BALOOTAKI M A, RAHMANI H, MOEINKHAH H, et al. On the synchronization and stabilization of fractional-order chaotic systems: recent advances and future perspectives[J]. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 2020, 551: 124203.
- [11] BARBOSA R S, MACHADO J A T. Describing function analysis of systems with impacts and backlash[J]. Nonlinear Dynamics, 2002, 29(1-4): 235-250.
- [12] SINGH A P, DEB D, AGARWAL H. On selection of improved fractional model and control of different systems with experimental validation [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2019, 79: 104902.
- [13] XIE Qian, ZHANG Yanbin, YU Yanan, et al. A novel method to magnetic flux linkage optimization of direct-driven surface-mounted permanent magnet synchronous generator based on nonlinear dynamic analysis[J]. Energies, 2016, 9(7): 557.
- [14] XIE Qian, MU Changhui, WU Gang, et al. Method for flux linkage optimization of permanent magnet synchronous motor based on nonlinear dynamic analysis [J]. Nonlinear Dynamics, 2019, 97(4): 2067-2089.

(责任编辑 周 蓓)