

DOI:10.19322/j.cnki.issn.1006-4710.2022.01.005

旋转运动 SMA 层合梁动力学建模与非线性自由振动分析

王 航^{1,2}, 穆安乐¹, 黄泽波¹

(1. 西安理工大学 机械与精密仪器工程学院, 陕西 西安 710048;

2. 西安铁路职业技术学院 机电工程学院, 陕西 西安 710026)

摘要: 层合梁铺层中内嵌 SMA 丝时,可以有效改变层合梁旋转运动时的动态特性。为了研究旋转运动 SMA 层合梁的振动特性,使用 Brinson 一维 SMA 本构模型获得温度变化时的恢复应力与马氏体体积分数。使用坐标变换建立层合梁质点在惯性系下的位移。基于 Euler-Bernoulli 梁和 Von Karman 大变形理论,建立了位移场与应变之间的关系。使用 Hamilton 变分原理,获得大范围旋转运动层合梁的动力学方程,并用 Ritz 法获得内嵌 SMA 丝层合梁的非线性自由振动方程。旋转运动对 SMA 层合梁的自由振动有明显的影响。研究了同一转速下,不同 SMA 体积分数、初始应变对固有频率的影响,而且研究了石墨层纤维铺设角度对层合梁基频的影响。

关键词: 形状记忆合金; 非线性自由振动; 旋转层合梁

中图分类号: O327

文献标志码: A

文章编号: 1006-4710(2022)01-0032-09

Dynamic modeling of rotating SMA laminated beam and nonlinear free vibration analysis

WANG Hang^{1,2}, MU Anle¹, HUANG Zebo¹

(1. Faculty of Mechanical and Precision Instrument Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China; 2. School of Mechanical and Electrical Engineering, Xi'an Railway Vocational & Technical Institute, Xi'an 710026, China)

Abstract: When SMA wires are embedded in the laminated beam, and the dynamic characteristics of the laminated beam are changed. In order to study the fundamental frequency of rotating SMA laminated beams, the recovery stress and martensite volume fraction are obtained by using Brinson's one-dimensional SMA constitutive model. Based on Euler-Bernoulli beam and Von Karman large deformation theory, the relationship between displacement and strain is obtained. The displacement of laminated beam is established by coordinate transformation. The Hamilton principle is used to obtain the dynamic equation to the laminated beam with large rotation motion. The nonlinear free vibration equation to the laminated beam is obtained by Ritz method. The rotational motion has an obvious effect on the free vibration of SMA laminated beams. The natural frequency at the same rotating speed changes when there existing different SMA volume fractions, pre-strains and angles of laying graphite fiber.

Key words: shape memory alloy; nonlinear free vibration; rotating laminated beam

复合材料有着广阔的应用前景。复合材料质量轻,有很大的刚度和阻尼,其优异的力学特性使得复合材料尤其是层合材料有着非常广泛的应用前景。

复合材料制成的旋转结构在很多场合下均有使用,例如汽轮机叶片、压缩机、风机叶片等。形状记忆合金(SMA)是一种非常有应用前景的智能材料。

收稿日期: 2021-05-02; **网络出版日期:** 2021-10-22

网络出版地址: <https://kns.cnki.net/kcms/detail/61.1294.N.20211022.1153.004.html>

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51075326)

第一作者: 王航,男,博士生,研究方向为动力学建模及数值仿真。E-mail: 965348806@qq.com

通信作者: 穆安乐,男,博士,教授,博导,研究方向为风力机动力学分析与自适应控制。E-mail: muanle@xaut.edu.cn

SMA 在受热的情况下会表现出很大的恢复力,可以作为一种驱动器使用。这种驱动器可以制作成很小的体积,不但能省去电机驱动过程中的一些复杂的传动机构,而且有研究表明,内嵌 SMA 丝的层合材料制成的机械臂可以很好地抑制振动。

SMA 的理论研究难点是如何建立精确的一维 SMA 本构关系。SMA 的应变可以归结为热变形和马氏体相变两部分^[1-2]。在此基础之上,有不少文献对内嵌 SMA 丝的复合结构进行了分析。研究的对象主要是梁、板和壳。研究显示,温度变化时内嵌 SMA 丝的复合梁,其自由振动的基频是不同的,SMA 的体积分数对后屈曲特性的影响也是显著的,主要表现为降低热屈曲响应。当 SMA 的体积分数、初始应变增大时,基频的变化趋势是上升的,基频曲线同横轴的交点后移^[3-4]。内力的变化趋势同基频曲线的变化趋势是相同的,屈曲变形也随着 SMA 体积分数的增大而减小,屈曲温度低于奥氏体开始温度时,SMA 的存在可以使失稳的梁结构处于稳定状态^[5]。SMA 的存在减小了层合板的变形挠度^[6]。SMA 层合板处于复杂的物理场中时,比如在热场中受一阶气动活塞力作用时,系统的非线性颤振特性是不同的,主要表现为随着 SMA 体积分数的增加,稳定区域逐渐扩大,由此可得,SMA 可以提高结构的稳定性^[7]。Dehkordi^[8]用非线性有限元与增量迭代算法进行仿真计算,发现 SMA 的存在降低了板的振幅。Kumar 等^[9]用分层理论重新描述了位移场,得到 SMA 丝的铺设角度越大,屈曲温度越高。Karimi 等^[10]在分析 SMA 层合板时,没有考虑系统的非线性特性,并发现板的长宽比增大时,基频整体上是上升的。相应的,在大的长宽比时,记忆合金的恢复应力对基频的影响作用下降了。文献^[11]使用遗传算法获得了最佳的 SMA 丝铺设次序和敷设角度,获得了不同边界条件下 SMA 层合板的最优固有频率。可以使用广义微分求积法分析内嵌 SMA 丝的圆柱壳的固有振动特性。SMA 层越靠近圆柱壳的内壁,系统的基频越大^[12]。对于圆锥壳而言,增大半顶角能有效地增加基频;沿中性面对称布置 SMA 层时,可以增加基频,而单层布置时基频变小了^[13]。任勇生等^[14]发现,SMA 层合梁非线性固有频率增大时,其振幅也是增大的,而对应线性系统没有该特性。事实上,就目前的研究成果而言,记忆合金一维本构模型是所有内嵌 SMA 丝层合结构的研究基础,并且,研究对象的边界条件也仅限于简支和固支的情况。而关于大范围旋转运动梁的自由振动,也有着丰富的研究成果。黄意新等^[15]通过

与有限元结果对比,认为 Chebyshev 谱方法计算的旋转梁固有频率是正确的。此外,旋转 Rayleigh 梁的长细比等相关参数会对临界转速产生影响,且临界转速随着长细比的增大而减小^[16]。范纪华等^[17]使用 Bezier 曲线离散动力学方程,得到不同角速度下,旋转梁厚度变化对固有频率的影响将大于宽度的影响。旋转 Timoshenko 梁的频率会随着转速的增加而增大,并随着长厚比的增加而减小^[18]。而且在分析旋转结构的固有频率时,总是认为系统的旋转角速度是定值^[19-21]。Aksencer 等^[22]研究了旋转层合梁的固有频率,轮毂比小于 0.5 时,转速增加则固有频率增加;轮毂比大于 1 时,会产生频率为零的情况。

通过对现有文献的总结可知,关于 SMA 层合结构的振动研究主要集中在基频以及热屈曲方面,而对于旋转运动 SMA 层合梁的非线性自由振动,尚未被涉及。本文使用 Von Karman 大变形理论来描述梁位移与应变的关系,建立了层合梁任意质点在惯性坐标系下的位移表达式,用 Brinson 模型描述了不同温度下 SMA 的恢复应力和马氏体体积分数。使用 Hamilton 原理建立了 SMA 层合梁大范围旋转运动的动力学方程。研究了系统参数变化时,SMA 层合梁的动力学响应。基于内力恒定的假设,得到了恒定转速下,旋转 SMA 层合梁横向振动的动力学方程。研究了 SMA 在不同初始应变、体积分、石墨纤维铺设角度以及 SMA 所处铺层不同时,固有频率的变化。

1 系统建模

1.1 SMA 本构方程

尽管有多种描述 SMA 本构关系的模型,但是 Brinson 模型是目前主流的分析方法,大部分研究 SMA 热屈曲与自由振动的文献都采用了该模型^[3-7]。文献^[1]将 SMA 的变形视为由热应力引起的变形和由马氏体相变引起的形变两部分组成。依据 Brinson 模型,SMA 中马氏体的体积分数为:

$$\xi = \xi_s + \xi_T \quad (1)$$

式中: ξ_s 为应力诱发的马氏体相变体积分数; ξ_T 为温度诱发的马氏体相变体积分数。

相变转变为奥氏体时,马氏体的体积分数为:

$$\xi = \frac{\xi_0}{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{A_f - A_s} \left(T - A_s - \frac{\sigma^r}{C_A} \right) \right) + 1 \right] \quad (2)$$

$$\xi_s = \xi_{s_0} \frac{\xi}{\xi_0} \quad (3)$$

$$\xi_T = \xi_{T_0} \frac{\xi}{\xi_0} \quad (4)$$

式中, ξ_0 为初始状态时的马氏体体积分数; σ^r 是 SMA 恢复应力; T 为温度; ξ_{S_0} 为初始应力诱发的马氏体体积分数; ξ_{T_0} 为初始温度诱发的马氏体体积分数; C_A 是应力影响系数。有关 SMA 的其他参量参考文献[5]。

又可知, SMA 杨氏模量为:

$$E_s(\xi) = \frac{E_A}{1 + \left(\frac{E_A}{E_M} - 1\right)\xi} \quad (5)$$

式中: E_A 和 E_M 分别表示 SMA 在纯奥氏体和纯马氏体相时的杨氏模量。假设 SMA 处于文献[5]所述的零初始条件下, 当温度 $T > A_s$, 并且 $C_A(T - A_f) < \sigma^r < C_A(T - A_s)$ 时, SMA 丝的恢复应力为:

$$\sigma^r = E_s(\xi)(\varepsilon - \varepsilon_L \xi_S) + \Theta \Delta T \quad (6)$$

在初始条件下, $\xi_{S_0} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_L}$, $\xi_{T_0} = 0$, 求解关于 σ^r 的非线性方程即得恢复应力, 并由式(2)可以得到马氏体体积分数。相对温度是加热温度与初始温度的差值, 即 $\Delta T = T - T_0$ 。

通过求解式(2)、(5)、(6)联立所得的非线性方程组, 即可获得温度变化时 SMA 的恢复应力与马氏体体积分数, 如图 1 所示。

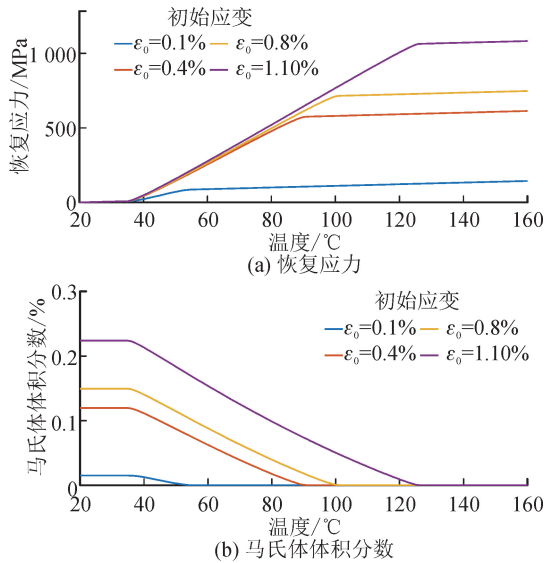


图 1 温度变化时 SMA 恢复应力与马氏体体积分数
Fig. 1 Recovery stress and volume fraction of martensite under temperature change

由图 1 可知, 温度低于奥氏体开始温度时, 马氏体体积分数为定值。随着温度逐渐升高, 图 1(a) 中显示 SMA 恢复应力有上升的趋势, 而图 1(b) 中马氏体体积分数是下降的, 直至温度达到某个值时, SMA 中将不再含有马氏体成分, 变为纯奥氏体, 此时, SMA 恢复应力曲线的上升趋势变缓。此外, 当初始应变增大时, 转变为纯奥氏体的临界温度也随之增大。

1.2 系统的动能和应变能

SMA 丝和石墨纤维内嵌在不同的环氧树脂基层中。做旋转运动 SMA 层合梁示意图, 如图 2 所示。其中, 惯性坐标系为 $OXYZ$, 中心刚体的附体坐标系为 $O_1X_1Y_1Z_1$, SMA 层合梁的附体坐标系为 $O_2X_2Y_2Z_2$ 。中心刚体的半径为 R , 层合梁绕刚体中心轴线做旋转运动的角位移为 φ , 角速度为 Ω 。

SMA 层合梁的长度为 L , 宽度为 B , 总厚度为 H , 铺层都是等厚的, 总的层数为 N_l 。

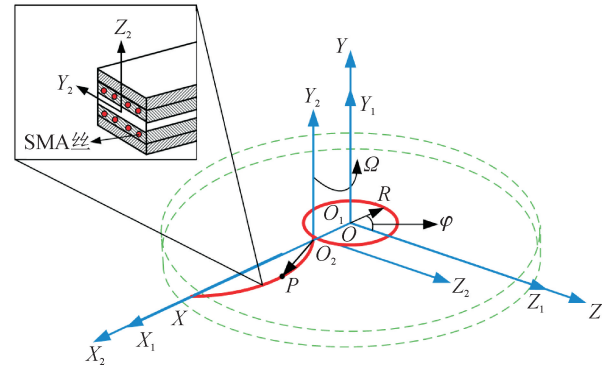


图 2 系统简图

Fig. 2 System diagram

梁内任意质点 P 在惯性系 $OXYZ$ 下的矢径为:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R + x + \tilde{u} \\ \tilde{w} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

其中, \tilde{u} 、 \tilde{w} 是梁内任意质点的变形位移。

令式(7)对时间求导, 可得质点的速度为:

$$\mathbf{V} = \begin{Bmatrix} (\dot{\tilde{u}} - \Omega\tilde{w})\cos\varphi \\ \dot{\tilde{w}} + \Omega(R + x + \tilde{u})\sin\varphi \end{Bmatrix} \quad (8)$$

质点任意位移与中面位移有如下关系:

$$\tilde{u}(x, z, t) = u(x, t) + f \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \quad (9)$$

$$\tilde{w}(x, z, t) = w(x, t) \quad (10)$$

其中, u 、 w 是梁的中面位移, $f = -z$ 。

由式(8)、(9)、(10)可知系统的动能为:

$$P = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_l} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \int_S \rho^{(k)} \left\{ \begin{aligned} & (\dot{\tilde{u}} - \Omega\tilde{w})^2 + \\ & [\dot{\tilde{w}} + \Omega(R + x + \tilde{u})]^2 \end{aligned} \right\} dSdz = \\ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_l} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \int_S \rho^{(k)} \times \\ \left\{ \begin{aligned} & \left(\dot{u} + f \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} - \Omega w \right)^2 + \\ & \left[\dot{w} + \Omega(R + x + u + f \frac{\partial w}{\partial x}) \right]^2 \end{aligned} \right\} dSdz \quad (11)$$

根据 Von Karman 大变形理论,应变为:

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{xx}^{(0)} + f\epsilon_{xx}^{(1)} \quad (12)$$

$$\begin{cases} \epsilon_{xx}^{(0)} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \epsilon_{xx}^{(1)} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{cases} \quad (13)$$

这里的 f 同上。

可知正应力为:

$$(\sigma_{xx})_k = (\bar{Q}_{11})_k \{\epsilon_{xx}\}_k - (\bar{Q}_{11}\alpha_x)_k \Delta T + \cos^2(\theta_k) V_s \sigma_k^i \quad (14)$$

其中, α_x 为各层有效热膨胀系数,由铺层角和基底材料、纤维材料的热膨胀系数决定; \bar{Q}_{11} 的具体表达式见附录 1; θ_k 是第 k 层中纤维铺设方向与坐标正方向的夹角; V_s 是 SMA 的体积分数。

应变能为:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_f} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \int_0^L (\sigma_{xx} \epsilon_{xx}) B dx dz = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_f} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \int_0^L [\sigma_{xx} (\epsilon_{xx}^{(0)} + f\epsilon_{xx}^{(1)})] B dx dz = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L [N_x \epsilon_{xx}^{(0)} + M_x \epsilon_{xx}^{(1)}] B dx \end{aligned} \quad (15)$$

整理得内力和弯矩为:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} \\ B_{11} & D_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{(0)} \\ \epsilon_{xx}^{(1)} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N^T \\ M^T \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} N^r \\ M^r \end{Bmatrix} \quad (16)$$

其中, N^T 、 M^T 是 SMA 的热应力、热弯矩; N^r 、 M^r 是 SMA 的恢复力、恢复弯矩。具体表达式为:

$$\begin{aligned} (N^T, M^T) &= \sum_{k=1}^{N_f} \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\bar{Q}_{11}\alpha_x)_k \Delta T (1, f) dz \\ (N^r, M^r) &= \sum_{k=1}^{N_f} \int_{z_k}^{z_{k+1}} [\sigma^r V_s \cos^2(\theta_k)] (1, f) dz \end{aligned}$$

同时,等效刚度为:

$$(A_{11}, B_{11}, D_{11}) = \sum_{k=1}^{N_f} \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\bar{Q}_{11})_k (1, f, f^2) dz$$

在低转速的情况下,离心力不大,离心力产生的变形可忽略不计。因此,这里不考虑离心力势能。

1.3 动力学方程

应用 Hamilton 原理建立系统的动力学方程。将式(11)、(15)代入式(17)。根据 Hamilton 变分原理:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta P - \delta U + \delta W) dt = 0 \quad (17)$$

其中, t_0 、 t_1 为任意两个固定时刻。旋转 SMA 层合梁的运动方程为:

$$\begin{aligned} I_0 \ddot{u} - I_1 \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial x^2} - 2I_0 \Omega \dot{w} - I_0 \Omega^2 (R + x + u) - \\ I_0 \dot{\Omega} w + I_1 \Omega^2 \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} I_0 \ddot{w} + I_1 \frac{\partial^2 \ddot{u}}{\partial x^2} - I_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial x^2} + 2I_0 \Omega \dot{u} - \\ 4I_1 \Omega \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} + I_0 \dot{\Omega} (R + x + u) - I_1 \Omega^2 \frac{\partial u}{\partial x} - \\ I_0 \Omega^2 w - 2I_1 \dot{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x} + I_2 \Omega^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial N}{\partial x} - \\ N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = f \end{aligned} \quad (19)$$

具体化简过程见附录 2。

其中广义惯量为:

$$(I_0, I_1, I_2) = \sum_{k=1}^{N_f} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \rho^{(k)} (1, f, f^2) dz$$

对方程进行简化,设轴向力 N 沿着 x 轴是恒定的^[4],即:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 0 \quad (20)$$

可知

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(A_{11} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] - B_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - N^T + N^r \right) = 0 \quad (21)$$

经过相应的积分运算可知:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{B_{11}}{A_{11}} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \quad (22)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{B_{11}}{A_{11}} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \quad (23)$$

$$\frac{1}{A_{11}} (N^T - N^r + C_1(t))$$

$$u(x, t) = - \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{B_{11}}{A_{11}} \frac{\partial w}{\partial x} - \quad (24)$$

$$\frac{x}{A_{11}} (N^T - N^r + C_1(t)) + C_2(t)$$

又简支-简支梁的边界条件为: $u(0, t) = 0$, $u(L, t) = 0$, $u''(0, t) = 0$, $u''(L, t) = 0$ 。

将边界条件代入式(24),可得:

$$C_1(t) = - \frac{A_{11}}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx - \quad (25)$$

$$\frac{B_{11}}{L} \left[\frac{\partial w(L, t)}{\partial x} - \frac{\partial w(0, t)}{\partial x} \right] - (N^T - N^r)$$

$$C_2(t) = \frac{B_{11}}{A_{11}} \frac{\partial w(0, t)}{\partial x} \quad (26)$$

将式(25)、(26)回代入式(24)、(19),则系统方程可化简为单自由度运动方程:

$$\begin{aligned} I_0 \ddot{w} + 2I_0 \Omega \dot{u} - 4I_1 \Omega \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} + I_0 \dot{\Omega} (R + x + u) - \\ I_1 \Omega^2 \frac{\partial u}{\partial x} - I_0 \Omega^2 w - 2I_1 \dot{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x} + I_2 \Omega^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \\ N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

系统的振动方程整理为:

$$\zeta(x, t) = I_0 \ddot{w} - I_1 \Omega^2 \times \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{B_{11}}{A_{11}} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left[\frac{1}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{B_{11}}{A_{11}L} \left[\frac{\partial w(L, t)}{\partial x} - \frac{\partial w(0, t)}{\partial x} \right] \right] \right\} - I_0 \Omega^2 w + \left\{ I_2 \Omega^2 - \frac{B_{11}}{L} \left[\frac{\partial w(L, t)}{\partial x} - \frac{\partial w(0, t)}{\partial x} \right] - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - N^T + N^r \right\} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \left(\frac{B_{11}^2}{A_{11}} - D_{11} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \quad (28)$$

可知,系统简化后是一个非线性方程。非线性系统固有频率的求解有很多种方法,比如谐波平衡法、Ritz法等。

2 振动分析

使用振动分析中常用的 Ritz 法进行求解^[23],设横向中面位移为:

$$w(x, t) = aW(x) \cos(\omega t) \quad (29)$$

式中: $W(x)$ 为振动的模态函数; a 为 SMA 梁在 $x = \frac{L}{2}$ 处的幅值; ω 为固有频率。

$$\int_0^{2\pi} \zeta(x, t) \cos(\omega t) d(\omega t) = 0 \quad (30)$$

将式(29)代入式(30)中,经过运算,可得:

$$\left(D_{11} - \frac{B_{11}^2}{A_{11}} \right) \frac{d^4 W}{dx^4} - \left\{ \frac{A_{11} a^2}{2L} \int_0^L \left(\frac{dW}{dx} \right)^2 dx - N^T + N^r \right\} \times \left\{ \frac{d^2 W}{dx^2} - \frac{I_1 \Omega^2 \frac{B_{11}}{A_{11}L} [W'(L) - W'(0)] + I_0 (\omega^2 + \Omega^2)}{I_0 (\omega^2 + \Omega^2)} \right\} W = 0 \quad (31)$$

由于层合材料的铺层沿中性面是对称布置的,故等效惯量 $I_1 = 0$, 式(31)可整理为:

$$\left(D_{11} - \frac{B_{11}^2}{A_{11}} \right) \frac{d^4 W}{dx^4} - \left\{ \frac{A_{11} a^2}{2L} \int_0^L \left(\frac{dW}{dx} \right)^2 dx - \frac{d^2 W}{dx^2} - I_0 (\omega^2 + \Omega^2) \right\} W = 0 \quad (32)$$

构建方程如下:

$$\frac{d^4 W}{dx^4} - \delta^2 \frac{d^2 W}{dx^2} - \kappa^4 W = 0 \quad (33)$$

其系数为:

$$\delta^2 = \frac{\frac{A_{11} a^2}{2L} \int_0^L \left(\frac{dW}{dx} \right)^2 dx - I_2 \Omega^2 - N^T + N^r}{D_{11} - \frac{B_{11}^2}{A_{11}}}$$

$$\kappa^4 = \frac{I_0 (\omega^2 + \Omega^2)}{D_{11} - \frac{B_{11}^2}{A_{11}}}$$

式(33)为四阶微分方程,其通解为:

$$W(x) = C_1 \cosh(\gamma x) + C_2 \sinh(\gamma x) + C_3 \cos(\eta x) + C_4 \sin(\eta x) \quad (34)$$

式(34)中系数表达式为:

$$\gamma = \sqrt{\sqrt{\left(\frac{\delta^4}{4} \right) + \kappa^4} + \left(\frac{\delta^2}{2} \right)}$$

$$\eta = \sqrt{\sqrt{\left(\frac{\delta^4}{4} \right) + \kappa^4} - \left(\frac{\delta^2}{2} \right)}$$

其中, $W(x)$ 满足简支-简支梁边界条件:

$W(0) = 0, W(L) = 0, W''(0) = 0, W''(L) = 0$ 。由边界条件可以得到关于系数的等式关系,并且由等式系数行列式为零,可得模态函数为:

$$W = C_4 \sin(n\pi x) \quad (35)$$

将上述两式代入式(29)中,并参考文献[23],令

$$C_4 = \frac{a}{2}, \text{ 可得固有基频为:}$$

$$\omega^2 = \frac{n^2 \pi^2}{I_0} \left[\frac{n^2 \pi^2 \left(D_{11} - \frac{B_{11}^2}{A_{11}} \right) + \frac{A_{11} a^2}{2L} \int_0^L \left(\frac{dW}{dx} \right)^2 dx - I_2 \Omega^2 - N^T + N^r \right] - \Omega^2 \quad (36)$$

其中, Ω 为稳定旋转角速度。计算上式即可获得固有频率。从非线性固有频率的表达式可知,由于广义惯量 I_2 的值很小,故在低转速的情况下,大范围旋转运动对系统固有频率的影响不大。

3 数值计算

层合梁的长度 $L = 1$ m, 宽度 $B = 0.1$ m, 厚度 $H = 0.01$ m, 每一铺层的厚度均相等。SMA 的相关参数如表 1 所示,石墨/环氧树脂铺层的物理参数如表 2 所示。层合梁的铺层为 8 层,纤维丝铺层沿中性面对称布置,铺层与坐标正方向夹角为 $[0^\circ_{\text{SMA}} / 90^\circ_{\text{graphite}} / 90^\circ_{\text{graphite}} / 90^\circ_{\text{graphite}}]$, 铺层是等厚的。初始情况下, $\xi_{T_0} = 0, T_0 = 20$ °C, SMA 的初始应力 $\sigma_0 = 0, \epsilon_0 = 0.2\%, V_s = 3\%$ 。

表 1 SMA 参数
Tab.1 SMA parameters

参数	数值	参数	数值
E_A /GPa	67	C_M /($\text{MPa} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$)	8
E_M /GPa	26.3	C_A /($\text{MPa} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$)	13.8
Θ /($\text{MPa} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$)	0.55	α_s /($^\circ\text{C}^{-1}$)	1.026×10^{-7}
M_f / $^\circ\text{C}$	9	ν_s	0.33
M_s / $^\circ\text{C}$	18.4	ρ_s /($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)	6 450
A_s / $^\circ\text{C}$	34.5	ϵ_l /%	0.067
A_f / $^\circ\text{C}$	49		

表 2 石墨/环氧树脂铺层的物理参数

Tab.2 Physical parameters of graphite / epoxy resin layer

参数	数值
E_{1m} /GPa	$155(1 - 3.53 \times 10^{-4} \Delta T)$
E_{2m} /GPa	$8.07(1 - 4.27 \times 10^{-4} \Delta T)$
G_{12m} /GPa	$4.55(1 - 6.06 \times 10^{-4} \Delta T)$
α_{1m} /($^\circ\text{C}^{-1}$)	$-0.07 \times 10^{-6}(1 - 1.25 \times 10^{-3} \Delta T)$
α_{2m} /($^\circ\text{C}^{-1}$)	$3.01 \times 10^{-5}(1 + 0.41 \times 10^{-4} \Delta T)$
ρ_m /($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)	1 586
ν_{12m}	0.22

求解式(36)可得不同角速度时的基频,如图 3 所示。由图 3 可知,在其他条件不变的情况下,转速增大时,系统的基频减小,但是不同转速下基频的变化趋势是一致的。

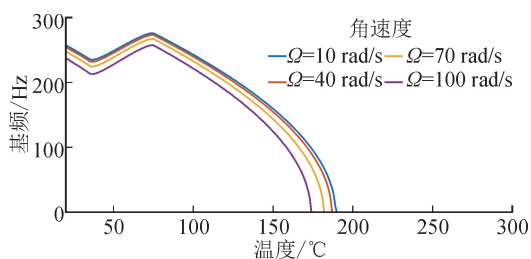


图 3 不同角速度时的基频

Fig.3 Fundamental frequency at different angular velocities

即随着温度上升,SMA 转变为非晶马氏体时,基频下降;温度继续上升,SMA 转变为马氏体时,基频上升。在 SMA 转变为纯奥氏体的过渡阶段,温度持续上升,热应力增加快于 SMA 的恢复应力,导致层合梁刚度减小,基频也随之减小。由图可知,SMA 转变为纯奥氏体的相变温度为 74°C ,且不随旋转角速度的变化而变化。

图 4 是不同初始应变时基频的变化曲线。此时,设 SMA 层合梁的旋转角速度恒定, $\Omega = 40 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ 。研究不同初始应变下基频随温度的变化趋势。

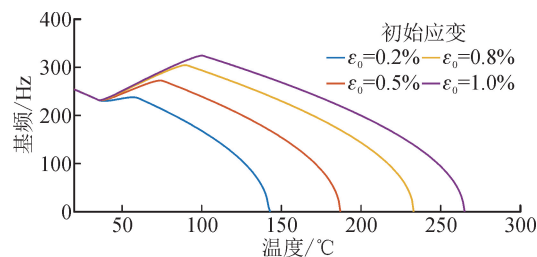


图 4 不同 SMA 初始应变时的基频

Fig.4 Fundamental frequency of SMA with different initial strains

图 4 表明,当温度高于奥氏体起始温度 34.5°C 时,SMA 产生的拉力变大,从而显著增加了梁的刚度,导致基频增加。奥氏体温度结束之后,温度升高对梁的膨胀作用大于 SMA 恢复应力的收缩作用,因此基频降低。初始应变的增大可以显著增加转变为纯奥氏体的温度,最大的转变温度为 101°C 。

图 5 是 SMA 体积分数对基频的影响曲线。

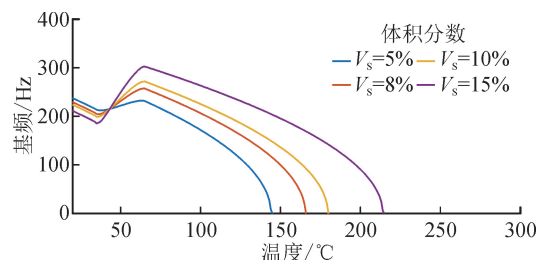


图 5 不同 SMA 体积分数时的基频

Fig.5 Fundamental frequency of SMA with different volume fractions

当 SMA 丝的体积分数变大时,基频的变化幅度更加显著,即基频曲线切线的斜率更大;而且,所有的基频变化曲线都经过了 $(49, 223)$ 这个点,该点处的横坐标为奥氏体结束温度。并且,不同体积分数下,SMA 转变为纯奥氏体的温度是相同的,均为 68°C 。

研究石墨纤维铺设角度对自由振动的影响,如图 6 所示。此时,转速仍然为 40 rad/s ,SMA 丝的铺设角度为定值 0° ,温度为 50°C 。由图可知,初始应变越大,系统固有频率越大。

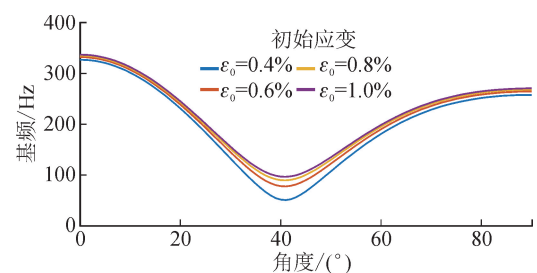


图 6 石墨纤维铺设角度对基频的影响

Fig.6 Influence of laying angle of graphite fiber on fundamental frequency

图6显示,不同的初始应变下,基频的变化趋势是相同的,都是随着角度的增加,基频先减小后增大。

由图7可知,随着温度上升,基频整体呈现出减小的趋势。

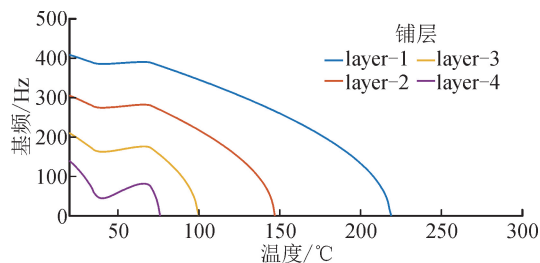


图7 SMA所在层对基频的影响

Fig. 7 Influence of SMA layer ordinal on fundamental frequency

当记忆合金所在的铺层靠近中性面时,系统的基频比SMA层位于外层时要大。这是由于记忆合金层位于内层时系统的刚度上升所致,而且SMA越靠近内层,基频的变化趋势就越缓慢。

在进行相关仿真时,除了长高比之外,其他参数如转速等,是固定不变的。由图8可知,随着温度的上升,基频整体呈现出减小的趋势。

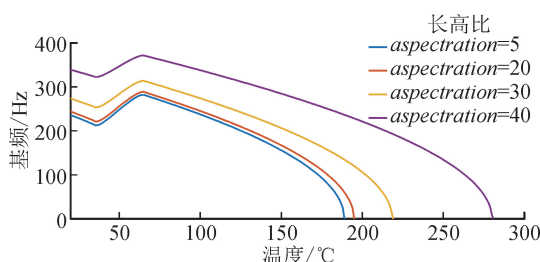


图8 长高比对基频的影响

Fig. 8 Influence of aspect ratio on fundamental frequency

长高比增大时,层合梁的固有频率是增大的。这是因为,厚度是不变的,而长度是厚度的整数倍,长度增加就使得广义惯量的增幅比刚度的增幅小。

4 结论

利用Hamilton变分原理,建立了大范围旋转运动SMA层合梁的动力学方程,研究了该系统的自由振动特性。

1) 在旋转角速度一定的情况下,当系统处于马氏体相变的阶段时,系统的基频随着温度的上升而增大,这是因为在该阶段SMA恢复应力急剧增大,使得系统刚度增大所致。

2) 旋转角速度增大时,基频是减小的,但是旋转运动对基频的影响有限。

3) SMA铺设角度不变而石墨纤维的角度变化时,固有频率先减小后增大。

4) SMA铺层靠近中性面时,系统刚度增大、固有频率减小,随着温度增加,基频更快地衰减为零。

5) 层合梁的长高比增大时,基频是增大的。

参考文献:

- [1] AURICCHIO F, SACCO E. A one-dimensional model for super-elastic shape-memory alloys with different elastic properties between austenite and martensite[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 1997, 32(6): 1101-1114.
- [2] BRINSON L C. One-dimensional constitutive behavior of shape memory alloys; Thermomechanical derivation with non-constant material functions and redefined martensite internal variable[J]. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 1993, 4(2): 229-242.
- [3] ASADI H, BODAGHI M, SHAKERI M, et al. An analytical approach for nonlinear vibration and thermal stability of shape memory alloy hybrid laminated composite beams[J]. European Journal of Mechanics / A Solids, 2013, 42: 454-468.
- [4] EBRAHIMI M R, MOEINFAR A, SHAKERI M. Nonlinear free vibration of hybrid composite moving beams embedded with shape memory alloy fibers[J]. International Journal of Structural Stability and Dynamics, 2016, 16(7): 201-216.
- [5] ASADI H, KIANI Y, SHAKERI M, et al. Exact solution for nonlinear thermal stability of hybrid laminated composite Timoshenko beams reinforced with SMA fibers[J]. Composite Structures, 2014, 108: 811-822.
- [6] PARK J S, KIM J H, MOON S H. Vibration of thermally post-buckled composite plates embedded with shape memory alloy fibers[J]. Composite Structures, 2004, 63(2): 179-188.
- [7] ZHANG Zhenhua, SHENG Piao. Research on stability and nonlinear vibration of shape memory alloy hybrid laminated composite panel under aerodynamic and thermal loads[J]. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 2016, 27(20): 1-11.
- [8] DEHKORDI M B. Modeling of simultaneous shape memory and pseudoelastic effects of shape memory alloys on nonlinear dynamic response of multilayer composite plate embedded with pre-strained SMA wires under thermal condition[J]. Mechanics of Advanced Materials and Structures, 2019, 26(16): 1411-1422.
- [9] KUMAR S K, SINGH B N. Thermal buckling analysis of SMA fiber-reinforced composite plates using layer-wise model[J]. Journal of Aerospace Engineering,

- 2009,22(4): 342-352.
- [10] KARIMI M R, SHAKERI M, DANESH P M. Free vibration of laminated composite plate with shape memory alloy fibers[J]. Latin American Journal of Solids and Structures, 2016, 3(2):314-330.
- [11] MAHABADI R K, PAZHOOH M D, SHAKERI M. On the free vibration and design optimization of a shape memory alloy hybrid laminated composite plate[J]. Acta Mechanica, 2020, 11(9): 323-343.
- [12] NEKOUEI M, RAGHEBI M, MOHAMMADI M. Free vibration analysis of hybrid laminated composite cylindrical shells reinforced with shape memory alloy fibers[J]. Journal of Vibration and Control, 2019, 26(7): 1-17.
- [13] NEKOUEI M, RAGHEBI M, MOHAMMADI M. Free vibration analysis of laminated composite conical shells reinforced with shape memory alloy fibers[J]. Acta Mechanica, 2019, 230(12): 4235-4255.
- [14] 任勇生,田继爽,刘银磊,等.形状记忆合金纤维复合材料梁非线性变形、热屈曲和振动[J].山东科技大学学报:自然科学版,2019,38(1):99-110.
REN Yongsheng, TIAN Jishuang, LIU Yinlei, et al. Nonlinear deformation, thermal buckling and vibration of SMA fiber composite beams[J]. Journal of Shandong University of Science and Technology (Natural Science), 2019, 38(1): 99-110.
- [15] 黄意新,田浩,赵阳.弹性连接旋转柔性梁动力学分析[J].力学学报,2016,48(4):963-971.
HUANG Yixin, TIAN Hao, ZHAO Yang. Dynamic analysis of a rotating flexible beam with elastic boundary conditions[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2016, 48(4): 963-971.
- [16] 杨高峰,杜长城,邵永波,等.旋转 Rayleigh 梁的自由振动及失稳特性[J].应用力学学报,2020,37(3):1178-1183,1398.
YANG Gaofeng, DU Changcheng, SHAO Yongbo, et al. Free vibration and buckling characteristic of rotating Rayleigh beam[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2020, 37(3): 1178-1183,1398.
- [17] 范纪华,章定国,洪嘉振.基于 Bezier 插值方法的作大范围旋转运动锥形悬臂梁动力学研究[J].动力学与控制学报,2012,10(4):347-354.
FAN Jihua, ZHANG Dingguo, HONG Jiazhen. Dynamic analysis of a rotating tapered cantilever beam based on Bezier curve interpolation[J]. Journal of Dynamics and Control, 2012, 10(4): 347-354.
- [18] YANG Xiaodong, WANG Shaowen, ZHANG Wei, et al. Model formulation and modal analysis of a rotating elastic uniform Timoshenko beam with setting angle[J]. European Journal of Mechanics-A/Solids, 2018, 72: 209-222.
- [19] 任勇生,代其义,孙丙磊,等.旋转几何非线性复合材料薄壁梁的自由振动分析[J].振动与冲击,2013,32(14):139-147.
REN Yongsheng, DAI Qiyi, SUN Binglei, et al. Free vibration of a rotating composite thin-walled beam with large deformation[J]. Journal of Vibration and Shock, 2013, 32(14): 139-147.
- [20] 黎亮,章定国,洪嘉振.中心刚体-功能梯度材料梁系统的动力学特性[J].机械工程学报,2013,49(13):77-84.
LI Liang, ZHANG Dingguo, HONG Jiazhen. Dynamics of hub-functionally graded material beam systems[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2013, 49(13): 77-84.
- [21] 董兴建,孟光,蔡国平,等.旋转柔性梁的动力学建模及分析[J].振动工程学报,2006,19(4):488-493.
DONG Xingjian, MENG Guang, CAI Guoping, et al. Dynamic modelling and analysis of a rotating flexible beam[J]. Journal of Vibration Engineering, 2006, 19(4): 488-493.
- [22] AKSENCER T, AYDOGDU M. Vibration of a rotating composite beam clamped-off the axis of rotation[J]. Composite Structures, 2019, 225: 1-10.
- [23] LEWANDOWSKI R. Application of the Ritz method to the analysis of non-linear free vibrations of beams[J]. Journal of Sound and Vibration, 1987, 114(1): 91-101.

附录 1:

SMA 层的基底材料是环氧树脂, SMA 丝内嵌在基底材料中。相似的,石墨纤维内嵌在环氧树脂层中。

$$E_{11} = E_s(\xi)V_s + E_{1m}(1 - V_s)$$

$$E_{22} = E_{2m} \left[(1 - \sqrt{V_s}) + \frac{\sqrt{V_s}}{1 - \sqrt{V_s} \left(1 - \frac{E_{2m}}{E_s(\xi)}\right)} \right]$$

$$G_{12} = G_{12m} \left[1 - \sqrt{V_s} + \frac{\sqrt{V_s}}{1 - \sqrt{V_s} \left(1 - \frac{G_{12m}}{G_s(\xi)}\right)} \right]$$

$$G_s(\xi) = \frac{E_s(\xi)}{2(1 + \nu_{12s})}$$

$$\alpha_1 = \frac{V_s \alpha_s E_s(\xi) + (1 - V_s) \alpha_{1m} E_{1m}}{E_{11}}$$

$$\alpha_2 = \frac{E_{2m}}{E_{22}} \left[\alpha_{2m} (1 - \sqrt{V_s}) + \frac{\alpha_{2m} \sqrt{V_s} - V_s (\alpha_{2m} - \alpha_s)}{1 - \sqrt{V_s} \left(1 - \frac{E_{2m}}{E_s(\xi)}\right)} \right]$$

$$\alpha_r = \cos^2(\theta_k) \alpha_1 + \sin^2(\theta_k) \alpha_2$$

$$\rho = \rho_s V_s + \rho_m (1 - V_s)$$

偏轴方向的刚度系数 \bar{Q} 与材料主轴方向的刚度系数 Q

之间的变换关系为:

$$[\bar{Q}] = [T]^T [Q] [T]$$

式中: $[T]$ 是变换矩阵, 其表达式如下:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2 \beta & \sin^2 \beta & \sin \beta \cos \beta \\ \sin^2 \beta & \cos^2 \beta & -\sin \beta \cos \beta \\ -2\sin \beta \cos \beta & 2\sin \beta \cos \beta & \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \end{bmatrix}$$

材料主轴方向的系数为:

$$[Q] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}$$

其中:

$$Q_{11} = \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, Q_{12} = \frac{\nu_{12} E_{22}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, \nu_{21} = \frac{\nu_{12} E_{22}}{E_{11}}$$

$$Q_{21} = \frac{\nu_{12} E_{11}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, Q_{22} = \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, Q_{66} = G_{12}$$

附录 2:

纵向位移为:

$$u(x, t) = -\frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{B_{11}}{A_{11}} \frac{\partial w}{\partial x} + x \left\{ \frac{1}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{B_{11}}{A_{11}L} \left[\frac{\partial w(L, t)}{\partial x} - \frac{\partial w(0, t)}{\partial x} \right] \right\} + \frac{B_{11}}{A_{11}} \frac{\partial w(0, t)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{B_{11}}{A_{11}} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} +$$

$$\left\{ \frac{1}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{B_{11}}{A_{11}L} \left[\frac{\partial w(L, t)}{\partial x} - \frac{\partial w(0, t)}{\partial x} \right] \right\}$$

内力为:

$$N = \frac{A_{11}}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx +$$

$$\frac{B_{11}}{L} \left[\frac{\partial w(L, t)}{\partial x} - \frac{\partial w(0, t)}{\partial x} \right] - N^T + N^r$$

内力矩为:

$$M = B_{11} \left\{ \frac{B_{11}}{A_{11}} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{B_{11}}{A_{11}L} \left[\frac{\partial w(L, t)}{\partial x} - \frac{\partial w(0, t)}{\partial x} \right] \right\}$$

$$D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - M^T + M^r$$

令内力矩对 x 求二阶偏导:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = \left(\frac{B_{11}^2}{A_{11}} - D_{11} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}$$

(责任编辑 周 蓓)