DOI:10.19322/j. cnki. issn. 1006-4710. 2022. 02. 019

# 三参数异形椭球面方程、几何特征及应用前景

# 武周虎

(青岛理工大学环境与市政工程学院,山东青岛 266033)

摘要:基于二维异形椭圆方程和三维对流扩散物质的等浓度面方程,定义了半长度、半宽度和半高度3个独立参数,分别构建了三维空间的  $\square$  型和  $\square$  型异形椭球面——2 种三参数闭曲面方程。在笛卡尔坐标系中, $\square$  型异形椭球面在  $\square$  双平行面上的横截面为椭圆,在  $\square$  双 坐标面上的剖面曲线均为异形椭圆; $\square$  型异形椭球面在  $\square$  双平行面、 $\square$  双 和  $\square$  又 坐标面上的剖面曲线以及俯视轮廓线均为异形椭圆,关于坐标面  $\square$  双对称,上半部分与下半部分的体积比约为  $\square$  8:1。分析表明, $\square$  型和  $\square$  型异形椭球面可以选择整体或分段组合应用于蛋形曲面建筑、民用飞机、船舶形状优化和工艺品等设计,具有很好的科学研究和应用前景。

关键词: 异形椭圆; 三参数闭曲面; 异形椭球面; 几何特征; 曲面体设计

中图分类号: TB113, TB21 文献标志码: A 文章编号: 1006-4710(2022)02-0295-06

# Three-parameter heteromorphic ellipsoid surface equation, geometric characteristics and application prospects

WU Zhouhu

Abstract: Based on the two-dimensional heteromorphic ellipse equation and the three-dimensional constant concentration surface equation of convective diffusion material, three independent parameters of half length, half width and half height are defined, with two types of three-parameter closed-surface equations constructed respectively for type I and type II heteromorphic ellipsoids in three-dimensional space. In the Cartesian coordinate system, the cross-section of the type I heteromorphic ellipsoid on the yOz parallel plane is an ellipse, and the profile curves on the xOy and xOz coordinate planes are all heteromorphic ellipses; the profile curves of the type II heteromorphic ellipsoid surface on the yOz parallel plane, the xOy and xOz coordinate planes and the top view contour lines are all of heteromorphic ellipses. In terms of the symmetry of the coordinate plane xOz, the volume ratio of the upper half to the lower half is about 0.8:1. The analysis shows that for Type I and Type II heteromorphic ellipsoids, the whole or segmented combination can be selected to be applied to the design of egg-shaped curved buildings, civil aircraft, ship shape optimization and handicrafts, which has good scientific research and application prospects.

**Key words:** heteromorphic ellipse; three-parameter closed surface; heteromorphic ellipsoid surface; geometric characteristics; curved body design

椭球面是一种二次曲面,它是椭圆在三维空间的推广[1],蛋形曲线[2-3]绕对称轴旋转 180 度形成蛋形曲面,常见的闭曲面类型有球面、椭球面、环形面和蛋形曲面等。世界各国具有代表性的蛋形仿生建筑有中国国家大剧院、日本东京巨蛋(Tokyo Dome)、英国埃克斯伯里蛋形(Exbury Egg)和印度

孟买赛博蛋形(the Cybertecture Egg)等<sup>[4]</sup>。武周虎基于河流常系数对流扩散简化方程的解析解,推导出污染混合区等浓度线方程<sup>[5-6]</sup>,据此定义了只有单对称轴的二参数平面闭曲线——异形椭圆(Wu's曲线)方程,讨论了异形椭圆的几何性质以及在交通隧道和水工隧洞设计中的应用<sup>[7-9]</sup>。异形椭圆作为

收稿日期: 2021-03-08; 网络出版日期: 2021-06-08

网络出版地址: https://kns.cnki.net/kcms/detail/61.1294. N. 20210608.0830.002. html

基金项目: 国家自然科学基金面上资助项目(51379097,50979036)

第一作者:武周虎,男,硕士,教授,研究方向为水利、土木和环境工程。E-mail:wu\_zh2008@aliyun.com

重要的数学曲线,在日常生产生活中具有重要应用价值。

本文基于笔者创建的二维异形椭圆方程和三维对流扩散物质的等浓度面方程<sup>[10]</sup>,定义纵向半长度、横向半宽度和垂向半高度3个独立参数,分别构建三维空间的 I 型和 II 型异形椭球面——2 种三参数闭曲面方程,分析它们的几何特征,探讨它们的应用前景,为其推广应用提供理论支持。

# 1 异形椭圆

武周虎[7-9]创建的异形椭圆(见图 1)方程为:

$$\left(\frac{y}{b}\right)^2 = -e \frac{x}{2a} \ln\left(\frac{x}{2a}\right), (0 \le x \le 2a, -b \le y \le b)$$

(1)

式中:2a 为异形椭圆对称轴(纵向坐标)x 方向的长度;b 为非对称轴(横向坐标)y 方向的半宽度;自然常数 e $\approx$ 2.718。值得注意的是,当 x=0 时,式(1)中  $\left(\frac{x}{2a}\right)\ln\left(\frac{x}{2a}\right)$ 是一种"未定式",需采用洛必达法则计算(下同)。

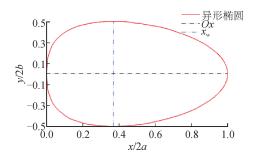


图 1 归一化异形椭圆示意图 Fig. 1 Schematic diagram of a normalized heteromorphic ellipse

由图 1 可以看出,异形椭圆像一个变形的椭圆,在对称轴 Ox 的 O 端钝胖,远端锐瘦,它是只有单对称轴的二参数平面闭曲线。异形椭圆宽度(即最大宽度)相应的纵向坐标为  $x_w = 2a/e \approx 0.368(2a)$ ,接近黄金分割比例,使图形产生美感。异形椭圆 4个顶点坐标分别为(0,0)、(2a,0)、(2a/e,-b)和(2a/e,b)。

异形椭圆的面积等于其面积系数、长度和宽度的乘积<sup>[7-8]</sup>,即有面积公式为:

$$S = \mu(2a)(2b) \tag{2}$$

式中: 异形椭圆的面积系数  $\mu = (\frac{2}{3})^{1.5} \frac{\sqrt{\pi e}}{2} \approx$  0. 795。该数值比椭圆的面积系数  $(=\pi/4)$  增大 1. 27%。

# 

#### 2.1 基本方程

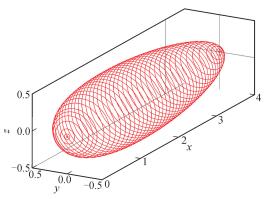
基于武周虎<sup>[10]</sup>水库稳定点源简化三维对流扩散物质的等浓度面方程,定义三维空间的 I 型异形椭球面方程为:

$$\left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = -e\frac{x}{2a}\ln\left(\frac{x}{2a}\right),$$
 (3)

$$(0 \leqslant x \leqslant 2a, -b \leqslant y \leqslant b, -c \leqslant z \leqslant c)$$

式中:c 为非对称轴(垂向坐标)z 方向的半高度,其它符号同前。

当 a=2.0、b=c=0.5 时,由式(3)绘制 I 型异形椭球体的三维建模横截面轮廓线,见图 2(a);曲面体效果,见图 2(b)。



(a) 横截面轮廓线



(b) 曲面体效果

图 2 I 型异形椭球体的三维建模 Fig. 2 3D modeling of a type I heteromorphic ellipsoid

## 2.2 几何特征分析

由式(3)和图2可以得到如下结果。

1) 当 x =定值(0< x < 2a)时,即在 yOz 的平行面上, I 型异形椭球面的横截面为椭圆。当  $x_w = 2a/e$  时, I 型异形椭球面的横截面对应的椭圆最大,由式(3)得到最大横截面椭圆方程为:

$$\left(\frac{y}{h}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1\tag{4}$$

该椭圆与 I 型异形椭球面轮廓在 yOz 坐标面上的投影曲线重合。

 恰好是I型异形椭球面轮廓在相应坐标面上的投影曲线。即在这两个坐标面上的剖面曲线为最大异形椭圆。

- 3) I 型异形椭球面左、右、前、后、下和上的 6 个顶点坐标分别为(0,0,0)、(2a,0,0)、(2a/e,-b,0)、(2a/e,b,0)、(2a/e,0,-c)和(2a/e,0,c)。
- 4) 当 b=c 时,I 型异形椭球面就是异形椭圆绕对称轴 Ox 的 180 度旋转曲面。

综上,在笛卡尔坐标系中,I型异形椭球面的基本几何特征为:在yOz平行面上的横截面为椭圆,在xOy和xOz坐标面上的剖面曲线均为异形椭圆,在对称轴Ox的O端钝胖,远端锐瘦。

三维空间的 I 型异形椭球体的体积等于其体积系数、半长度、半宽度和半高度的乘积<sup>[10]</sup>,即有体积公式为.

$$V = \varphi abc \tag{5}$$

式中: I 型异形椭球体的体积系数  $\varphi = \frac{\pi e}{2} \approx 4.270$ 。 该数值比椭球体的体积系数(= $4\pi/3$ )增大 1.94%。

# 3 Ⅱ型异形椭球面

# 3.1 基本思路

将只有单对称轴的二参数平面闭曲线——异形椭圆在三维空间进行推广,定义纵向半长度(a)、横向半宽度(b)和垂向半高度(c)3个独立参数,构建II型异形椭球面方程,使II型异形椭球面在空间直角坐标面上的剖面曲线和俯视轮廓线均为异形椭圆。

# 3.2 方程构建

在空间直角坐标系 Oxyz 中,过原点 O 三条坐标轴 Ox、Oy、Oz 的正方向符合右手规则,见图 2。 II 型异形椭球面方程构建的方法步骤如下。

1) 在 y=0 的坐标面 xOz 上,设定  $\mathbb{I}$  型异形椭球面的剖面曲线为关于 Ox 轴上下对称的异形椭圆,其方程为:

$$\left(\frac{z_1}{c}\right)^2 = -e^{\frac{x}{2a}} \ln\left(\frac{x}{2a}\right), (0 \le x \le 2a, -c \le z_1 \le c)$$

或

$$z_1 = \pm c \sqrt{-e \frac{x}{2a} \ln\left(\frac{x}{2a}\right)}$$
 (7)

式中: $z_1$ 为  $\blacksquare$  型异形椭球面在 xOz 坐标面上剖面异形椭圆的垂向坐标,其它符合同前。

2) 当 x=定值时,即在 yOz 的平行面上,设定 II 型异形椭球面的横截面异形椭圆对称轴过 Ox 轴且平行于 Oz 轴。取横截面异形椭圆对称轴的下、上顶点坐标分别为( $y=0,z=-|z_1|$ )和( $y=0,z=|z_1|$ ),即

有横截面异形椭圆的对称轴垂向高度为  $2|z_1|$ 。设非对称轴横向半宽度为 $|y_b|$ 。

根据异形椭圆方程的基本形式,则有横截面异 形椭圆方程为:

$$\left(\frac{y}{|y_b|}\right)^2 = -e^{\frac{z+|z_1|}{2|z_1|}} \ln\left(\frac{z+|z_1|}{2|z_1|}\right)$$

$$(-|y_b| \leqslant y \leqslant |y_b|, -|z_1| \leqslant z \leqslant |z_1|) \quad (8)$$

3) 在 z=0 的坐标面 xOy 上,设定  $\mathbb{I}$  型异形椭球面的俯视轮廓(横截面异形椭圆宽度)曲线为关于 Ox 轴前后对称的异形椭圆,其方程为:

$$y_{b} = \pm b \sqrt{-e \frac{x}{2a} \ln\left(\frac{x}{2a}\right)}, (0 \leqslant x \leqslant 2a, -b \leqslant y_{b} \leqslant b)$$
(9)

式中: $y_b$ 为  $\blacksquare$  型异形椭球面在 xOy 坐标面上俯视轮廓异形椭圆的横向坐标。

4) 将式(7)和式(9)代人式(8)得到 II 型异形椭球面方程为:

当 a=2.0、b=c=0.5 时,由式(10)绘制 II 型异形椭球体的三维建模横截面轮廓线和网格剖面,见图  $3(a)\sim(b)$ 。

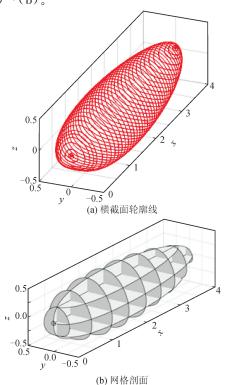


图 3 Ⅱ型异形椭球体的三维建模

Fig. 3 3D modeling of a type II heteromorphic ellipsoid

## 3.3 几何特征分析

由式(6)~式(10)和图 3 可以得到如下结果。

1) II 型异形椭球面关于坐标面 xOz 对称,在 xOz 坐标面上的剖面曲线呈现为由式(6)或式(7) 表示的异形椭圆。当  $x_w = 2a/e$  时, II 型异形椭球面的横截面对应的异形椭圆最大,由式(10)得到最大横截面异形椭圆方程为:

$$\left(\frac{y}{b}\right)^2 = -e^{\frac{z+c}{2c}} \ln\left(\frac{z+c}{2c}\right) \tag{11}$$

该异形椭圆与Ⅱ型异形椭球面轮廓在 *yOz* 坐标面上的投影曲线重合。

2) 当 x=定值时, $\mathbb{I}$  型异形椭球面的俯视轮廓线宽度对应的垂向位置与对称轴下顶点之间的距离为  $2|z_1|/e$ 。则有,该垂向位置坐标为  $z_w$ =(2/e-1) $|z_1|$ ,将式(7)代入后整理得到  $z_w$ 的表达式为:

$$z_{w} = -c\left(1 - \frac{2}{e}\right)\sqrt{-e\frac{x}{2a}\ln\left(\frac{x}{2a}\right)} \approx -0.264c\sqrt{-e\frac{x}{2a}\ln\left(\frac{x}{2a}\right)}$$
(12)

图 4 给出由式(7)表示的  $\coprod$  型异形椭球面在 xOz 坐标面上的剖面异形椭圆( $z_1$ )和由式(12)表示的俯视轮廓线对应的垂向坐标( $z_w$ )曲线。

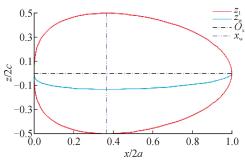


图 4 xOz 坐标面上的异形椭圆和俯视轮廓线对应的垂向坐标曲线

Fig. 4 A heteromorphic ellipse on the xOz coordinate plane, and the vertical coordinate curve corresponding to the top view contour

由图 4 和式(12)可知, II 型异形椭球面的俯视轮廓线对应的垂向坐标位于 z<0 的下部区域,其值随纵向坐标x 的分布曲线为半高度( $\approx$ 0.264c)的下半异形椭圆。据此得到, II 型异形椭球面的俯视轮廓线以下高度占同一横截面总高度的 1/e $\approx$ 0.368。

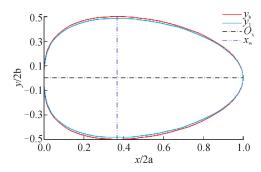
3) 当 z=0 时,由式(10)得到 Ⅱ 型异形椭球面的剖面曲线方程为:

$$y_{1} = \pm b \sqrt{-\frac{e}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right)} \sqrt{-e \frac{x}{2a} \ln\left(\frac{x}{2a}\right)} \approx \pm 0.971b \sqrt{-e \frac{x}{2a} \ln\left(\frac{x}{2a}\right)}$$
(13)

式中:y₁为Ⅱ型异形椭球面在 xOy 坐标面上剖面异

形椭圆的横向坐标。

图 5 给出由式(9)表示的  $\blacksquare$  型异形椭球面俯视轮廓异形椭圆( $y_b$ )和由式(13)表示的  $\blacksquare$  型异形椭球面在 xOy 坐标面上的剖面异形椭圆( $y_1$ )。



由图 5、式(9)和式(13)可知,  $\blacksquare$  型异形椭球面的俯视轮廓异形椭圆与在 xOy 坐标面上的剖面异形椭圆非常接近,两者具有相同的对称轴长度(2a)和横向最大宽度对应的纵向坐标( $x_w=2a/e$ ),横向坐标  $y_1 \approx 0.971$   $y_b$  (仅相差 2.94%)。

- 4) II 型异形椭球面左、右、前、后、下和上的 6 个顶点坐标分别为(0,0,0)、(2a,0,0)、(2a/e,-b,-0.264c)、(2a/e,b,-0.264c)、(2a/e,0,-<math>c) 和(2a/e,0,c)。
- 5)由异形椭圆面积系数分布曲线[ $^{9}$ ]可知, $\mathbb{I}$ 型 异形椭球面的所有横截面异形椭圆半高度以下面积均占同一横截面总面积的 55.61%。由此可知, $\mathbb{I}$ 型异形椭球体在 xOy 坐标面的上半部分与下半部分的体积比约为 0.8:1。

综上,在笛卡尔坐标系中,  $\blacksquare$  型异形椭球面的基本几何特征为:在 yOz 平行面、xOy 和 xOz 坐标面上的剖面曲线以及俯视轮廓线均为异形椭圆;关于坐标面 xOz 对称;上半部分体积小于下半部分体积;在对称轴 Ox 的 O 端钝胖,远端锐瘦;下部宽大、底部较平坦,上部瘦小、顶部稍尖瘦,形心较低,稳定性好等特点。

# 4 应用前景

三维空间 I 型和 II 型异形椭球面可以选择整体或分段与其它曲面组合应用,也可以选择从纵向坐标  $x_w=2a/e$  的最大横截面位置截断,在中间增加一段最大横截面的"柱体段",组合形成拟应用对象,以便获得更大的主体段功用空间。 I 型和 II 型异形椭球面可以任意选择纵向长度、横向宽度和垂向高度 3 个独立参数的数值大小和比例关系。限于篇幅

和专业技术,下面对 I 型和 II 型异形椭球面(包括组合体曲面)的应用前景进行探讨,暂不涉及结构分析、外形参数和流体力学特性等。

# 1) 蛋形曲面建筑

仿生建筑由来已久,世界各国蛋形仿生建筑屡见不鲜<sup>[4]</sup>。异形椭圆本身就是一个自然图形<sup>[7]</sup>,根据Ⅰ型和Ⅱ型异形椭球面的几何特征以及拟设计的建筑功用需求,合理选择纵向长度、横向宽度和垂向高度以及笛卡尔坐标系的方向,就可以设计出个性独特的Ⅰ型或Ⅱ型异形椭球面建筑造型。该类设计的建筑规模可大可小,可设计成体育场馆、大剧院、展览馆等,也可设计成住宅、别墅、现代"蒙古包"等。

如果选择对称轴 Ox 向上,I 型异形椭球面可以设计成高层摩天楼和塔楼的建筑造型,纵向坐标 $0 < x < x_w$ 以下的部分高度可以作为地下层建筑。

#### 2) 民用飞机

民用客机机身截面一般分为两种,圆形与多圆弧。圆形截面由一个完整的圆构成,受力特性好,但空间利用率较低。多圆截面由多段圆弧和与其相协调的光滑过渡曲线组成,空间利用率高,但采用 AUTOCAD 软件进行作图,效率低,无法自动优化[11]。

I型和Ⅱ型异形椭球面均具有独立 3 参数数学方程,可自动优化满足约束条件的设计方案。按照Ⅲ型异形椭球面方程构建的方法步骤,就能够更好地实现典型倒"8"字形机身截面和四段圆弧光滑过渡形机身截面[12]以及飞机后机身尾段截面[13]的参数化设计方法。

## 3) 船舶

科学研究与工程实践表明,船舶形状的优化设计对降低应力集中程度、获得精细化的结构形状、减小航行阻力、降低运输成本等,具有较高的应用价值[14-15]。

对船舶而言,采用倒置 II 型异形椭球形(见图 6),既可以实现船体轮廓曲面的平顺光滑,又可以获得更大的上部功用空间,便于客舱布置与货物装载。

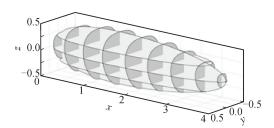


图 6 倒置 II 型异形椭球体的三维建模网格剖面 Fig. 6 3D modeling grid profile of the inverted type II heteromorphic ellipsoid

倒置Ⅱ型异形椭球体上半部分与下半部分的体积比约为1:0.8,浮心较高,下部为集中设备安装和动力层,形心较低,有利于船舶处于稳定平衡状态。

# 4) 工艺品

I型和Ⅱ型异形椭球面方程都具有可任意调整的3个独立参数,可变换的形状众多,图案具有单轴对称性,钝胖端与锐瘦端区分明显,异形椭圆最大宽度位置接近黄金分割比例,使图形产生美感,适合做工艺品设计。

在对称轴半高度等于横向半宽度(即旋转半径)条件下,图 7 给出  $a=b=c=50\,\mathrm{mm}\,\mathrm{I}\,$  型异形椭球体的 3D 打印样品(Wu's 夜明珠),它比球形摆放稳定性好。在对称轴纵向长度  $2a=55\,\mathrm{mm}\,$ 、横向宽度  $2b=32\,\mathrm{mm}\,$  和垂向高度  $2c=9\,\mathrm{mm}\,$  条件下,图 8(a) (b)给出 II 型异形椭球形吊坠的三维设计图案和 3D 打印样品,其造型美观大方。



图 7 a=b=c 的 I 型异形椭球体 Fig. 7 Type I heteromorphic ellipsoid with a=b=c



图 8 II 型异形椭球形吊坠
Fig. 8 Pendant in the shape of a type II
heteromorphic ellipsoid

#### 5 结 论

1) 基于三维对流扩散物质的等浓度面方程,定义了包含半长度、半宽度和半高度3个独立参数的

I型异形椭球面方程,给出在 yOz 平行面上的横截面为椭圆,在 xOy 和 xOz 坐标面上的剖面曲线均为异形椭圆的几何特征。

- 2)将只有单对称轴的二维异形椭圆在三维空间进行推广,构建了三参数Ⅱ型异形椭球面方程,给出在 yOz 平行面、xOy 和 xOz 坐标面上的剖面曲线以及俯视轮廓线均为异形椭圆、关于坐标面 xOz 对称、上半部分与下半部分的体积比约为 0.8:1的几何特征。
- 3)分析表明, Ⅰ型和Ⅱ型异形椭球面的连续性、光滑性和整体性好,可以选择整体或分段组合应用于蛋形曲面建筑、民用飞机、船舶形状优化和工艺品等设计,具有很好的科学研究和应用前景。

**致谢** 3D打印样品由青岛理工大学兰红波教授团队提供技术支持,硕士研究生祝帅举、任鹏绘制了三维建模图。

#### 参考文献:

- [1] 谷超豪. 数学词典[M]. 上海:上海辞书出版社,1992.
- [2] GARDNER M. The last recreations: hydras, eggs, and other mathematical mystifications [M]. New York: Springer-Verlag, 1997.
- [3] JÜRGEN K. Egg curves and ovals [EB/OL]. [2021-01-15]. http://www.mathematische-basteleien.de/egg-curves.htm.
- [4] 中国建筑学会. 世界各国蛋形仿生建筑一览[EB/OL]. (2015-03-09) [2021-01-15]. http://www.chinaasc.org/news/106965.html.
- [5] 武周虎,贾洪玉. 河流污染混合区的解析计算方法[J]. 水科学进展,2009,20(4):544-548.
  WU Zhouhu, JIA Hongyu. Analytic method for pollutant mixing zone in rivers[J]. Advances in Water Science, 2009, 20(4): 544-548.
- [6] WU Zhouhu, WU Wen, WU Guizhi. Calculation method of lateral and vertical diffusion coefficients in wide straight rivers and reservoirs[J]. Journal of Computers, 2011, 6(6):1102-1109.
- [7] WU Zhouhu. A new two-parameter heteromorphic elliptic equation: properties and applications[J]. World Journal of Engineering and Technology, 2020, 8(4): 642-657
- [8] 武周虎. 一种新型异形椭圆隧道横断面的性质及优化设计[J]. 重庆交通大学学报(自然科学版),2021,40 (1):87-95.

- WU Zhouhu. Properties and optimization design of a new heteromorphic ellipse tunnel cross-section [J]. Journal of Chongqing Jiaotong University (Natural Science), 2021, 40(1): 87-95.
- [9] 武周虎,王瑜,祝帅举. 一种新型异形椭圆无压隧洞断面的水力学分析[J]. 水利水电科技进展,2020,40(5):
  - WU Zhouhu, WANG Yu, ZHU Shuaiju. Hydraulic analysis of a novel free-flow tunnel cross-section with heteromorphic ellipse [J]. Advances in Science and Technology of Water Resources, 2020, 40(5):1-8.
- [10] 武周虎. 水库铅垂岸地形污染混合区的三维解析计算方法[J]. 西安理工大学学报,2009,25(4):436-440. WU Zhouhu. 3-D Analytic computational method of pollutant mixing zone for reservoir with vertical bank [J]. Journal of Xi'an University of Technology, 2009, 25(4): 436-440.
- [11] 曾超,徐惠民. 民用飞机机身剖面参数化设计分析 [J]. 民用飞机设计与研究,2012(增刊1):46-48,53. ZENG Chao, XU Huimin. Design and analysis of cross section of civil airplane[J]. Civil Aircraft Design and Research, 2012 (S1): 46-48,53.
- [12] 邹新煌. 民用飞机机身截面设计方案研究[J]. 中国科技信息,2012(18):90,92.

  ZOU Xinhuang. Investigation on fuselage section of commercial aircraft[J]. China Science and Technology Information, 2012(18): 90, 92.
- [13] 王磊,曹喜峰,陈学刚. 民用飞机后机身参数化设计探究[J]. 民用飞机设计与研究,2010(3):24-26. WANG Lei, CAO Xifeng, CHEN Xuegang. Research of parametric modeling for the rear fuselage of civil aircraft[J]. Civil Aircraft Design and Research, 2010 (3): 24-26.
- [14] 张会新,杨德庆. 典型船舶板架拓扑与形状优化设计 [J]. 中国舰船研究,2015,10(6):27-33,59. ZHANG Huixin, YANG Deqing. Typical shape and topology optimization design of the ship grillage structure[J]. Chinese Journal of Ship Research, 2015, 10 (6): 27-33,59.
- [15] 伍友军,赵超,张攀,等. 船舶典型节点的形状优化设计[J]. 舰船科学技术,2019,41(10);32-37. WU Youjun, ZHAO Chao, ZHANG Pan, et al. Shape optimization design for the details of ship joint structure[J]. Ship Science and Technology, 2019, 41(10); 32-37.

(责任编辑 王绪迪)