

DOI:10.19322/j.cnki.issn.1006-4710.2022.03.014

# 基于 Adomian 分解算法的新型分数阶混沌系统特性分析与 FPGA 实现

杨宁宁<sup>1</sup>, 杨 硕<sup>1</sup>, 吴朝俊<sup>2</sup>

(1. 西安理工大学 电气工程学院, 陕西 西安 710048; 2. 西安工程大学 电子信息学院, 陕西 西安 710048)

**摘要:** 混沌电路实现是混沌研究的基础, 目前混沌系统的 FPGA 实现多数采用在 MATLAB DSP Builder 平台搭建模型实现, 由于分数阶积分器难于构造, 该方法适合实现整数阶混沌系统, 同时其他基于分数阶微积分算法的编程实现方法原理复杂, 消耗资源多。针对上述问题, 提出了一个新型混沌系统, 通过 Lyapunov 指数, 分岔图, 平衡点等手段对系统的动力学行为进行了数值分析, 进一步将其拓展到分数阶, 给出了系统阶次  $q$  为 0.8 时不同状态下的相图, 其结果与分岔图所描述的状态吻合。最后, 采用 Adomian 分解法实现了该分数阶系统的 FPGA 硬件电路, 通过示波器观察到混沌相图与数值仿真结果一致, 从而验证了该分数阶混沌系统理论分析的正确性及可行性。

**关键词:** Adomian 算法; 分数阶混沌; 分岔图; FPGA 实现

**中图分类号:** TM132      **文献标志码:** A      **文章编号:** 1006-4710(2022)03-0426-07

## Characteristic analysis and FPGA implementation of a novel fractional-order chaotic system by Adomian decomposition algorithm

YANG Ningning<sup>1</sup>, YANG Shuo<sup>1</sup>, WU Chaojun<sup>2</sup>

(1. Faculty of Electrical Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China;

2. School of Electronic Information, Xi'an Polytechnic University, Xi'an 710048, China)

**Abstract:** The realization of chaotic circuits is the basis of chaotic research, and at present most FPGA implementations of chaotic systems are implemented by using the MATLAB DSP Builder platform to build models. Because fractional integrators are difficult to construct, this method is suitable for realizing integer-order chaotic systems. At the same time, other programming methods based on fractional calculus algorithms have complex principles and consume more resources. In response to the above problems, a new type of chaotic system is proposed, with the dynamic behavior of the system numerically analyzed by means of Lyapunov exponents, bifurcation diagrams, equilibrium points, etc. It is further extended to the fractional order, giving the system order  $q$  of 0.8, with the results of the phase diagrams under different states being consistent with the states described in the bifurcation diagram. Finally, the FPGA hardware circuit of the fractional-order system is realized by the Adomian decomposition method. The chaotic phase diagrams are consistent with the numerical simulation results observed through the oscilloscope. This verifies the correctness and feasibility of the theoretical analysis of the fractional chaotic system.

**Key words:** Adomian algorithm; fractional order chaos; bifurcation diagram; FPGA implementation

混沌是指发生在确定系统中的貌似随机的不规则运动, 随着分数阶微积分理论的完善以及一些实

际物理模型展示出分数阶动态特性之后, 分数阶混沌系统的研究愈来愈广泛<sup>[1]</sup>。混沌有预测难, 对初

收稿日期: 2021-06-23; 网络出版日期: 2021-12-16

网络出版地址: <https://kns.cnki.net/kcms/detail/61.1294.N.20211216.0910.002.html>

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51507134); 陕西省自然科学基金基础研究计划资助项目(2021JM-449, 2018JM5068)

第一作者: 杨宁宁, 女, 博士, 副教授, 硕导, 研究方向为非线性电路建模与控制。E-mail: yangning@xaut.edu.cn

通信作者: 杨硕, 男, 硕士生, 研究方向为非线性电路建模与控制。E-mail: 1163248740@qq.com

值敏感等特征,适用于密码学领域<sup>[2]</sup>以及控制领域<sup>[3]</sup>。目前主要有模拟电路和数字电路两种实现方式,模拟电路容易受到环境和器件老化的影响,从而使它的实际应用受到限制<sup>[4]</sup>,数字电路则很好地解决了这些问题。

文献[5-7]都是用 DSP 平台实现混沌系统数字电路,目前,部分分数阶混沌的硬件实现基于 DSP 平台,但是由于自身生成序列较慢,此方法适合应用于对速度要求不高的系统。

FPGA 具有并行运行,速度快,占用资源少等特点,更易于实现复杂分数阶混沌系统<sup>[8]</sup>。文献[9]通过编程在 FPGA 上实现了整数阶混沌系统。文献[10]在 MATLAB DSP Builder 平台搭建电路实现了混沌系统。分数阶混沌系统大多通过编程实现各种分数阶算法来硬件实现混沌系统。文献[11]通过利用 Grunwald-Letnikov 定义法编程与短记忆规则在 FPGA 上实现了分数阶混沌。文献[12-13]通过在 MATLAB DSP Builder 平台搭建模型,再将生成文件导入到 FPGA 中实现混沌,论证了利用 MATLAB DSP Builder 平台也可以实现分数阶混沌,但是这种方法实现分数阶系统需要构建分数阶积分器,增加了实现难度。文献[14]详细介绍了一种新的解决分数阶混沌的算法——Adomian 算法。该方法提出后,越来越多的学者投入到了对此方法的研究当中<sup>[15-17]</sup>。对于同一个分数阶混沌系统硬件实现,Adomian 分解法消耗的资源是 Grunwald-Letnikov 定义法的一半左右,产生的伪随机数最高频率却比 Grunwald-Letnikov 定义法高四分之一左右<sup>[18]</sup>。

电路实现是混沌系统实际应用的基础,总体上来说,目前通过 FPGA 实现分数阶混沌系统的方法可以分为两种,一种是利用编程实现混沌,一种是在 MATLAB DSP Builder 平台搭建电路自动生成 VHDL 语言实现。在 MATLAB DSP Builder 平台上实现分数阶混沌需要构造积分器,采用编程的方法实现分数阶混沌不用构造特定积分器但是追求消耗资源更少,更易理解的分数阶方程解法。

根据现有研究,本文构造了一个新的四维超混沌系统,取初值为 $[1, 3, 5, 6]$ ,对其进行了 Lyapunov 指数、耗散性、平衡点分析,发现其有丰富的动力学特性。推导得出其分数阶混沌系统,在分数阶阶次为 0.8 阶时,对这个分数阶系统进行相图,分岔图特性分析,最后在 FPGA 上采用 Adomian 分解法编程实现了该分数阶混沌,验证了采用 Adomian 分解法实现分数阶混沌的可实现性,为后期混沌系统的实际应用奠定了基础。

## 1 新型混沌系统建模及动力学行为分析

### 1.1 系统设计

一个新型整数阶混沌系统的数学模型见式(1),其中  $x, y, z, w$  为系统状态变量,  $a, b, c$  为系统参数。

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + yz \\ \dot{y} = xz - y^3 \\ \dot{z} = -bxy + cz + w \\ \dot{w} = x - z \end{cases} \quad (1)$$

### 1.2 系统特性分析

根据系统数学模型,有:

$$\begin{cases} 0 = -ax + yz \\ 0 = xz - y^3 \\ 0 = -bxy + cz + w \\ 0 = x - z \end{cases} \quad (2)$$

该方程有三个平衡点,分别为:  $S_1 = (0, 0, 0, 0)$ ,  $S_2 = (-18.520, 7, -18.520, -351.885)$ ,  $S_3 = (18.520, 7, 18.520, 351.885)$

在平衡点处将系统线性化,并带入平衡点,可以得到雅可比矩阵:

$$J_1 = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} -7 & -18.520 & 7 & 0 \\ -18.520 & -147 & -18.520 & 0 \\ -28 & 74.08 & 9 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$J_3 = \begin{bmatrix} -7 & 18.520 & 7 & 0 \\ 18.520 & -147 & 18.520 & 0 \\ -28 & -74.08 & 9 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

取  $a=7, b=4, c=9$  得系统 1 各平衡点特征值见表 1。根据 Routh-Hurwitz 判据<sup>[19]</sup>,可以得到系统三个平衡点均为不稳定鞍焦点。

表 1 各个平衡点的特征值

Tab. 1 Characteristic values of each balance point

$\lambda$	$S_1$	$S_2$	$S_3$
$\lambda_1$	0.013	0.013	8.89
$\lambda_2$	$1.79+19.02i$	$-1.79+19.02i$	0.11
$\lambda_3$	$1.79-19.02i$	$-1.79-19.02i$	0.00
$\lambda_4$	-141.44	-141.44	-7.00

当系统  $a=7, b=4$ , 初值为 $[1, 3, 5, 6]$ 时,得到了系统随参数  $c$  变化的 Lyapunov 图(见图 1),可以

看出参数  $c$  在  $[0, 6.78]$  范围内时, Lyapunov 指数变化不明显, 只有一个 Lyapunov 指数为明显负数, 系统在伪周期态, 混沌态, 超混沌态来回变化。参数  $c$  在  $[6.78, 15]$  范围内时, 有两个正的 Lyapunov 指数, 一个接近零的 Lyapunov 指数, 一个负的 Lyapunov 指数, 系统处于超混沌状态。

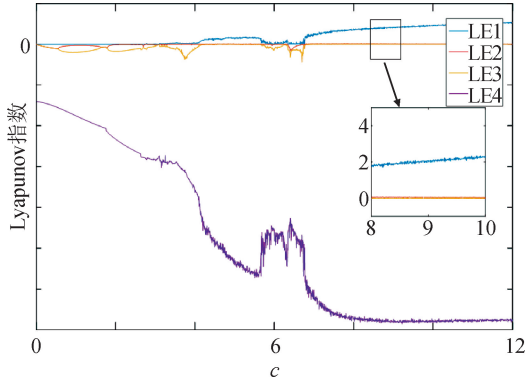


图1 Lyapunov 指数图

Fig.1 Lyapunov index graph

在分岔图(见图2)可以看到, 当参数  $c$  范围在  $[4, 4.83]$  时, 系统处于周期态, 当参数  $c$  范围在  $[4.83, 10]$  时, 系统处于混沌状态。图3给出了  $c=9$  时系统的混沌相图, 图4给出了  $c=4.3$  时系统周期态相图。

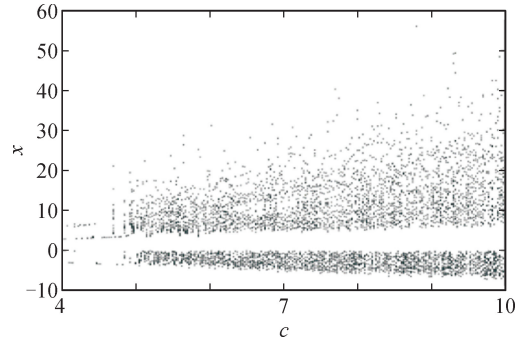


图2 系统分岔图

Fig.2 System bifurcation diagram

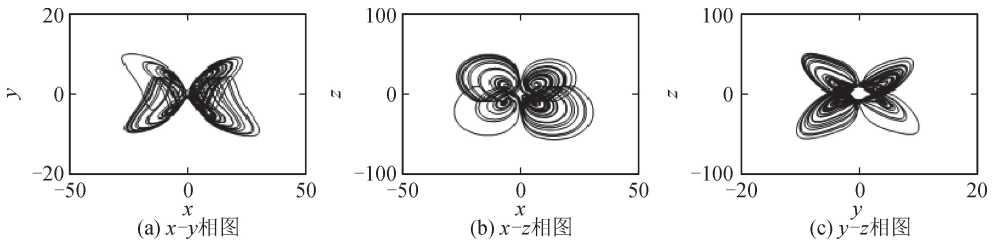


图3 整数阶系统混沌相图

Fig.3 Chaotic phase diagram of integer order system

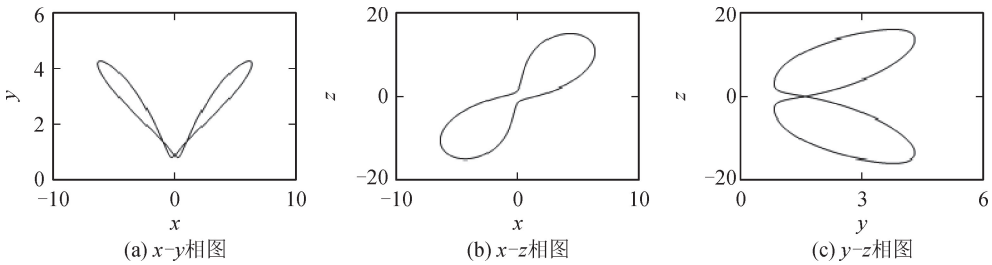


图4 整数阶系统周期态相图

Fig.4 Phase diagram of the periodic state of integer-order system

## 2 新型混沌系统建模及动力学行为分析

### 2.1 分数阶系统设计

将混沌系统1扩展得到分数阶混沌, 其数学模型见式(6),  $D$  是  $q$  阶微分算子,  $t_0$  为积分下限,  $t$  为积分上限。

$$\begin{cases} {}_{t_0}D^q x = -ax + yz \\ {}_{t_0}D^q y = xz - y^3 \\ {}_{t_0}D^q z = -bxy + cz + w \\ {}_{t_0}D^q w = x - z \end{cases} \quad (6)$$

当  $a=7, b=4, c=9$ , 系统阶数  $q=0.8$  时, 系统初值取  $[1, 3, 5, 6]$ , 系统表现出丰富的动力学行为, 见图5。

### 2.2 分数阶系统特性分析

当分数阶系统参数取  $a=7, b=4$  时,  $q=0.8$ , 参数  $c$  在  $[9, 12]$  之间的分岔图变化见图6(a), 可以看到当参数  $a=7, b=4, c=9$  时, 系统处于混沌状态。参数  $c$  在  $[32, 36]$  处的分岔图见图6(b)所示, 当参数  $c$  取值在 35 左右时, 可以看出系统在此阶段处于周期态, 其周期态相图见图7。

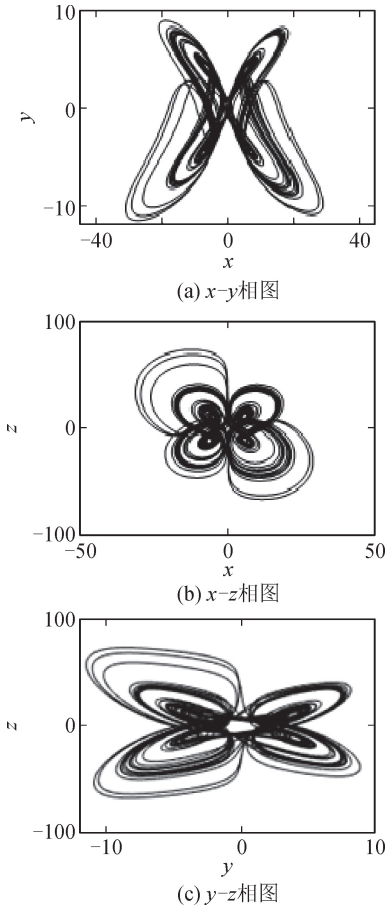


图 5 分数阶系统相图

Fig. 5 Fractional system phase diagram

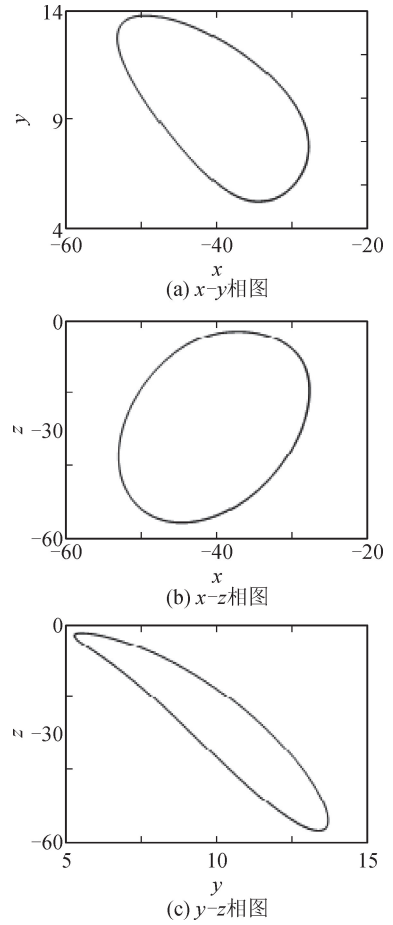


图 7 分数阶系统周期态相图

Fig. 7 Phase diagram of the periodic state of the fractional order system

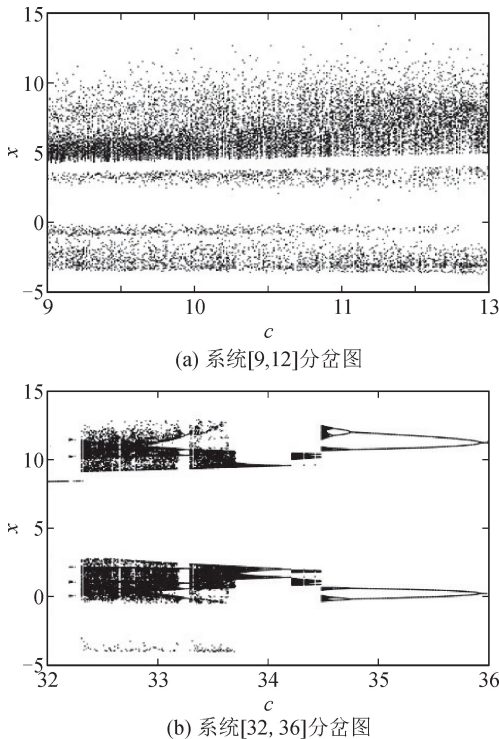


图 6 分数阶系统分岔图

Fig. 6 Bifurcation diagram of fractional order system

### 3 分数阶混沌系统 FPGA 实现

Adomian 分解法的关键点就是 Adomian 多项式分解,把非线性方程中的非线性项分解成多项式。

对于分数阶混沌系统:

$${}_{t_0} D_t^q x(t) = f(x(t)) + g(t) \quad (7)$$

$f(x(t))$  表示的混沌系统中的全部函数式(线性项和非线性项),  $x(t)$  是函数变量,  $g(t)$  是常数,将其分解为下式:

$${}_{t_0} D_t^q x(t) = L(x(t)) + N(x(t)) + g(t) \quad (8)$$

初始条件为:

$$x^{(k)}(t_0^+) = b_k, k = 0, \dots, m-1 \quad (9)$$

$L$  代表线性部分,  $N$  代表非线性部分,  $b$  为初始值,对式(8)两边积分得到:

$$x = J_{t_0}^q L(x) + J_{t_0}^q N(x) + J_{t_0}^q g + f \quad (10)$$

根据 Adomian 分解原理,方程的解可以表示为:

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} p^i \quad (11)$$

将式(10)中非线性项按下式分解:

$$\begin{cases} A_i^j = \frac{1}{j} \left[ \frac{d^j}{d\lambda^j} N(V_i^j) \right]_{\lambda=0} \\ V_i^j \lambda = \sum_{k=0}^i \lambda^k x_j^k \end{cases} \quad (12)$$

其中非线性项用下式表示:

$$N(x) = \sum_{i=0}^{\infty} A^i (P^0, P^1, \dots, P^i) \quad (13)$$

方程的解可以表示为:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=0}^{\infty} P^i = \\ &\sum_{i=0}^{\infty} J_{t_0}^q L(x) + \sum_{i=0}^{\infty} J_{t_0}^q N(x) + \\ &\sum_{i=0}^{\infty} J_{t_0}^q g + \varphi \end{aligned} \quad (14)$$

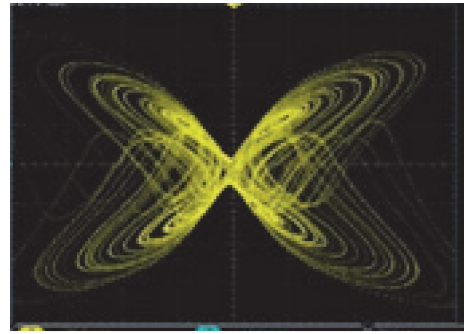
对分数阶系统中的非线性项按上述进行分解,可以得到分数阶系统的解:

$$\begin{cases} x(t) = x(t_0) + \sum_{j=1}^6 c_x^j \frac{(t-t_0)^{jq}}{\Gamma(jq+1)} \\ y(t) = y(t_0) + \sum_{j=1}^6 c_y^j \frac{(t-t_0)^{jq}}{\Gamma(jq+1)} \\ z(t) = z(t_0) + \sum_{j=1}^6 c_z^j \frac{(t-t_0)^{jq}}{\Gamma(jq+1)} \\ w(t) = w(t_0) + \sum_{j=1}^6 c_w^j \frac{(t-t_0)^{jq}}{\Gamma(jq+1)} \end{cases} \quad (15)$$

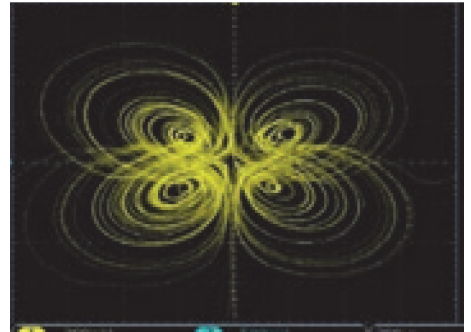
运用 Adomian 分解法实现此分数阶混沌,相当于实现若干个类似整数阶的分解式子,首先将初值 [1, 3, 5, 6] 赋值给第一次迭代,再将第一次迭代值赋值给第二次迭代,以此类推,迭代次数越多,得到最终值越精确,同时,其分解后得到的式子就是离散的,不需要再次进行离散化。分数阶运算可能导致乘法器不够用,所以乘法器采用分时复用方式实现,式子中的 Gamma 函数可视为常数。

FPGA 有浮点数,定点数两种数据方式,浮点数虽然精度高但是占用的资源远远大于定点数,综合考虑,本系统采用 42 位有符号定点数实现,取 1 个符号位,14 个整数位,27 个小数位。编译完成后,通过数模转换 AN9767 将输出转换为模拟信号在示波器上显示。

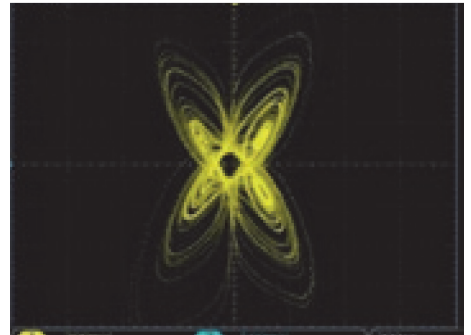
图 8 为示波器中观察到混沌相图,可以观察到这些相图与数值仿真得到的混沌相图一致,印证了使用 Adomian 分解法实现分数阶混沌系统的可行性,图 9 为 FPGA 硬件实现效果。



(a) x-y相图



(b) x-z相图



(c) y-z相图

图 8 示波器上观察到的相图

Fig. 8 Phase diagram observed on oscilloscope

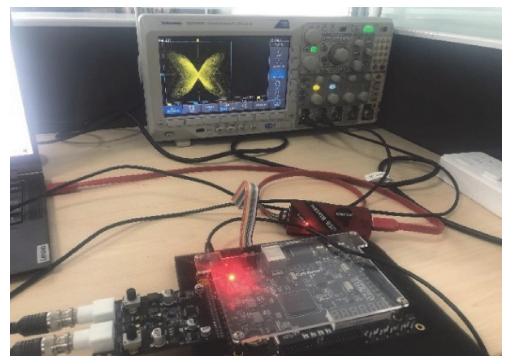


图 9 FPGA 硬件实现效果

Fig. 9 FPGA hardware implementation effect

## 4 结论

混沌电路实现是混沌系统研究不可缺少的一步,数字电路的实现更能验证混沌系统的可行性。

针对目前分数阶混沌系统实现复杂的问题,本文在一个新的整数阶混沌系统基础上构建一个新的分数阶混沌系统,在阶数  $q=0.8$ ,初始值取  $[1, 3, 5, 6]$  时,通过分岔图,平衡点等手段对其动力学行为进行了理论分析,验证其混沌特性。Adomian 分解法易于理解,相比其他方法,适合于求解分数阶混沌系统。在数字电路 FPGA 实现方面具有占用资源少,产生的伪随机数最高频率高等优势。最后本文采用 Adomian 分解法,在 FPGA 上编程实现了该分数阶混沌系统,在示波器上获得这个分数阶系统混沌相图,与数值仿真结果一直,验证了基于 Adomian 分解法实现分数阶混沌的可实现性。

#### 参考文献:

- [1] 张旭. 分数阶多稳态混沌系统动力学分析及同步研究[D]. 湘潭:湘潭大学,2019.  
ZHANG Xu. Dynamic analysis and synchronization of fractional-order multi-stable chaotic systems[D]. Xiangtan: Xiangtan University, 2019.
- [2] 周辉,谢红薇,张昊,等. 混沌系统和 DNA 编码的并行遥感图像加密算法[J]. 中国图象图形学报, 2021, 26(5):1081-1094.  
ZHOU Hui, XIE Hongwei, ZHANG Hao, et al. Parallel remote sensing image encryption algorithm based on chaotic system and DNA coding[J]. Journal of Image and Graphics, 2021, 26(5):1081-1094.
- [3] 王江彬,刘凌,刘崇新. 七阶电力系统混沌振荡的动态面滑模控制[J]. 电机与控制学报, 2021, 25(4):1-8.  
WANG Jiangbin, LIU Ling, LIU Chongxin. Dynamic surface sliding mode control of chaotic oscillation in seven-dimensional power system[J]. Electrical Machines and Control, 2021, 25(4):1-8.
- [4] ZHONG Guoqun, MAN K F, CHEN Guanrong. A systematic approach to generating N-scroll attractors[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2002, 12(12): 2907-2915.
- [5] 刘天明,阎慧臻,马晨光,等. 分数阶混沌系统动力学特性分析与 DSP 实现[J]. 大连工业大学学报, 2021, 40(1):44-50.  
LIU Tianming, YAN Huizhen, MA Chenguang et al. Dynamic analysis of the fractional-order chaotic system and its implementation on DSP platform[J]. Journal of Dalian Polytechnic University, 2021, 40(1):44-50.
- [6] 雷腾飞,王艳玲,苏敏,等. 分数阶 Qi 混沌系统的动力学分析及 DSP 实现[J]. 温州大学学报(自然科学版), 2018, 39(1): 32-39.  
LEI Tengfei, WANG Yanling, SU Min, et al. Dynamic analysis and DSP implementation of fractional Qi chaotic system[J]. Journal of Wenzhou University (Natural Sciences), 2018, 39(1): 32-39.
- [7] 雷腾飞,胡庆玲,尹劲松,等. 基于 Adomian 分解法的分数阶 Chen 混沌系统的动力学分析与 DSP 实现[J]. 曲阜师范大学学报(自然科学版), 2016, 42(3):76-82.  
LEI Tengfei, HU Qingling, YIN Jinsong, et al. Dynamic analysis and DSP implementation of fractional-order Chen chaotic system based on Adomian decomposition[J]. Journal of Qufu Normal University (Natural Science), 2016, 42(3):76-82.
- [8] 吕金锐. 一种姿态测量系统的 FPGA 和 DSP 设计与实现[J]. 计算机时代, 2021(5):29-32, 37.  
LÜ Jinrui. Design and implementation of FPGA and DSP for attitude measurement system [J]. Computer Era, 2021(5):29-32, 37.
- [9] 王忠林. 混沌吸引子及 FPGA 实现[J]. 计算机工程与应用, 2008, 44(36):85-86, 94.  
WANG Zhonglin. Chaotic attractor and its circuit implementation based on FPGA[J]. Computer Engineering and Applications, 2008, 44(36): 85-86, 94.
- [10] 王忠林,姚福安,李祥峰. 基于 FPGA 的一个超混沌系统设计与电路实现[J]. 山东大学学报(理学版), 2008, 43(12):93-96.  
WANG Zhonglin, YAO Fuan, LI Xiangfeng. Design and realization of a hyperchaotic system based FPGA [J]. Journal of Shandong University (Natural Science), 2008, 43(12) 93-96.
- [11] 周围,王强,吴周青. 分数阶简化 Lorenz 系统的 FPGA 实现[J]. 西南大学学报(自然科学版), 2020, 42(7): 177-183.  
ZHOU Wei, WANG Qiang, WU Zhouqing. FPGA implementation of the fractional-order simplified Lorenz system [J]. Journal of Southwest University (Natural Science), 2020, 42(7):177-183.
- [12] 杨宏,李亚安,李国辉,等. 分数阶混沌系统的 DSP Builder 设计方法[J]. 微电子学与计算机, 2010, 27(10):31-33.  
YANG Hong, LI Ya'an, LI Guohui, et al. The design method for fractional-order chaotic system based on DSP builder [J]. Microelectronics & Computer, 2010, 27(10):31-33.
- [13] 王山峰. 一类分数阶四翼混沌系统的分析及其硬件实现[D]. 天津:天津科技大学, 2019.  
WANG Shanfeng. Analysis and hardware implementation of a class of fractional four-wing chaotic system [D]. Tianjin: Tianjin University of Science and Technology, 2019.
- [14] 贺少波,孙克辉,王会海. 分数阶混沌系统的 Adomian 分解法求解及其复杂性分析[J]. 物理学报, 2014, 63

(3):58-65.

HE Shaobo, SUN Kehui, WANG Huihai. Solution of the fractional-order chaotic system based on Adomian decomposition algorithm and its complexity analysis [J]. Acta Physica Sinica, 2014, 63(3):58-65.

- [15] 曹立伟, 梁占红, 高金峰. 互联电力系统的 Adomian 分解法求解及其混沌特性分析[J]. 电测与仪表, 2016, 53(21):22-27.

CAO Liwei, LIANG Zhanhong, GAO Jinfeng. Solution of the interconnected power system based on Adomian decomposition method and its chaotic characteristic analysis[J]. Electrical Measurement & Instrumentation, 2016, 53(21): 22-27.

- [16] 雷腾飞, 陈恒, 王艳玲, 等. 基于 Adomian 分解法的分数阶 Bao 混沌系统动力学分析与电路实现[J]. 数学的实践与认识, 2020, 50(14):252-258.

LEI Tengfei, CHEN Heng, WANG Yanling et al. So-

lution analysis of the fractional-order Bao Chaotic system based on adomian decomposition and circuit implementation[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2020, 50(14):252-258.

- [17] QIN Chuan, SUN Kehui, HE Shaobo. Characteristic analysis of fractional-order memristor-Based hypogenetic Jerk system and its DSP implementation[J]. Electronics, 2021, 10(7): 841.

- [18] 吴周青. 基于 FPGA 的新型分数阶多翼混沌系统设计及其应用研究[D]. 重庆:重庆邮电大学, 2019.

WU Zhouqing. Research on the design and application of a novel fractional multi-wing chaotic system based on FPGA[D]. Chongqing: Chongqing University of Posts and Telecommunications, 2019.

- [19] 刘宗华. 混沌动力学基础及其应用[M]. 第6版. 北京:高等教育出版社, 2006.

(责任编辑 王绪迪)

(上接第365页)

- [31] 王鑫, 吴际, 刘超, 等. 基于 LSTM 循环神经网络的故障时间序列预测[J]. 北京航空航天大学学报, 2018, 44(4):772-784.

WANG Xin, WU Ji, LIU Chao, et al. Exploring LSTM based recurrent neural network for failure time series prediction[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2018, 44(4): 772-784.

- [32] 刘欣, 李佩娟, 盛云龙. 基于 Tensorflow 框架的生产线零件编号分类算法研究[J]. 南京工程学院学报(自然科学版), 2019, 17(4):31-37.

LIU Xin, LI Peijuan, SHENG Yunlong. Research of part number classification algorithm of production line based on tensorflow framework[J]. Journal of Nanjing Institute of Technology (Natural Science Edition), 2019, 17(4): 31-37.

- [33] SHEN Xu, TIAN Xinmei, LIU Tongliang, et al. Continuous dropout [J]. IEEE Transactions on Neural

Networks and Learning Systems, 2017, 29(9): 3926-3937.

- [34] KINGMA D, BA J. Adam: a method for stochastic optimization[OL]. arXiv, 2014. <https://arxiv.org/abs/1412.6980v8>.

- [35] 高玉才, 付忠广, 谢玉存, 等. 基于 BP-LSTM 的旋转机械振动信号异常检测模型[J]. 煤矿机械, 2021, 42(8):210-213.

GAO Yucai, FU Zhongguang, XIE Yucun, et al. Anomaly detection model of rotating machinery vibration signal based on BP-LSTM[J]. Coal Mine Machinery, 2021, 42(8): 210-213.

- [36] HUANG Jinlong, ZHAI Jianqing, JIANG Tong, et al. Analysis of future drought characteristics in China using the regional climate model CCLM[J]. Climate Dynamics, 2018, 50(1): 507-525.

(责任编辑 王绪迪)