

DOI:10.19322/j.cnki.issn.1006-4710.2023.01.008

<https://xuebao.xaut.edu.cn>

引文格式:付天一,丁根宏,田王达,杨雅朝. 基于解析几何的无人机编队定位与调整策略[J]. 西安理工大学学报,2023,39(1): 79-88.

FU Tianyi, DING Genhong, TIAN Wangda, YANG Yazhao. Research on UAV formation positioning and adjustment strategy based on analytic geometry[J]. Journal of Xi'an University of Technology, 2023,39(1): 79-88.

基于解析几何的无人机编队定位与调整策略

付天一¹, 丁根宏², 田王达¹, 杨雅朝¹

(1. 河海大学 能源与电气学院, 江苏 南京 211100; 2. 河海大学 理学院, 江苏 南京 211100)

摘要: 针对无人机编队中的无源定位问题,基于三角函数推导,对仅能接收夹角信息的无源定位圆形编队建立了定位的几何模型,并利用三角函数关系,结合解析法,讨论了仅已知部分无人机编号的情况;基于几何模型给出了编队初始略有偏差的调整策略;在编队队形发生改变的情况下,利用解析几何构建定位模型,实现新队形下的精确定位。结果表明:针对圆形编队三点定位问题,基于严谨的数学几何解三角形计算,建立接收信号无人机的定位模型,结果具有较高的准确性;针对圆形编队两点定位,第三点编号未知的情况下的定位问题,构建了基于无人机感知方位判定编号的解析模型,充分考虑到了接收信号的无人机的位置偏差大小与增加数量的关系,具有较好的普适性;针对圆形编队三架无人机实现队形调整策略问题,基于贪心策略,构建迭代调整模型,模型与解决问题的适配程度较高。

关键词: 无源定位; 三角学; 解析几何; 贪心策略

中图分类号: V249.121

文献标志码: A

文章编号: 1006-4710(2023)01-0079-10

Research on UAV formation positioning and adjustment strategy based on analytic geometry

FU Tianyi¹, DING Genhong², TIAN Wangda¹, YANG Yazhao¹

(1. College of Energy and Electrical Engineering, Hohai University, Nanjing 211100, China;

2. College of Science, Hohai University, Nanjing 211100, China)

Abstract: For the passive positioning question in UAV formations, a geometric model for positioning is established based on the derivation of trigonometric functions for passive positioning circular formations that can only receive pinch angle information, with the case where only some of the UAV numbers are known discussed using trigonometric relations combined with the analytical method; an adjustment strategy for the initial slight deviation of the formation is given based on the geometric model. In the case where the formation changes, an analytical geometry model is used to construct a positioning model to achieve precise positioning in the new formation. The results show that: for the three-point positioning question of circular formation, the positioning model for the UAV receiving signals is based on the rigorous mathematical geometry to solve the triangle calculation, and the results are highly accurate; for the positioning question of circular formation with two points and unknown number of the third point, an analytical model based on the UAV sensing orientation determination number is constructed, fully taking into account the position deviation of the UAV receiving signals. The relationship between the size of the UAVs and the number of increases is taken into account, which is of a good universality; for the ques-

收稿日期: 2022-12-06; 网络首发日期: 2023-02-25

网络首发地址: <https://kns.cnki.net/kcms/detail//61.1294.N.20230224.1455.002.html>

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(12271140)

第一作者: 付天一,男,本科,电力系统及其自动化专业。E-mail: 2005020218@hhu.edu.cn

通信作者: 丁根宏,男,博士,教授,研究方向为优化与建模、算法设计。E-mail: dinggenhong@126.com

tion of achieving a formation adjustment strategy for three UAVs in a circular formation, an iterative adjustment model is constructed based on a greedy strategy, and the model is highly adapted to the question.

Key words: passive positioning; trigonometry; analytic geometry; greedy strategies

有源雷达是领土防空的重要支撑,但是有源雷达面临着电子干扰、反辐射武器攻击、低空/超低空突防等一系列威胁。有源探测定位技术的观测站需要不断向外发出电磁信号,很容易被敌方发现并遭到针对性的打击和干扰,即暴露出隐蔽性差、抗干扰和抗侦察能力差等问题^[1-2]。无源定位技术采用被动的探测方式工作,各观测站并不主动向外发射信号,而是接收来自辐射源的电磁信号并进行处理和分析进而实现对目标的定位和跟踪。具有无需主动发射脉冲、可全时工作、不受发射机静默周期限制、安全性高、性能更加稳定可靠的优势^[3-5],是现代一体化防空系统的重要组成部分,并正在成为定位技术的主流研究方向。

根据观测站的数量不同,无源定位系统可以分为单站无源定位系统和多站无源定位系统。单站无源定位系统仅利用一个观测站对被测目标辐射源的状态参数进行估计,不需要多个观测站之间的信息通信及时钟同步,虽然成本较低,机动性强,但是为获得较高的定位精度需要对辐射源进行长时间多次测量,因此定位所需时间较长,且收敛速度较慢,难以及时获取目标的实时精确参数。而多站无源定位系统利用多个无源观测站协同对目标进行定位,可以获得更多的观测信息量,以保证定位精度,其缺点在于各站之间时间同步与空间校准难,通信带宽受限和数据交互频繁,系统复杂度比较高,一定程度上降低了其实用性和时效性^[6-8];单站定位系统可有效规避时间同步、空间校准等问题^[9-13]。

无人机(unmanned aerial vehicle, UAV)具有行动灵活、机动性高、使用简便、隐蔽性强等优点,可以实现对目标的侦查、定位跟踪甚至精确打击,成为现代战场上不可或缺的重要力量。此外,由于无源探测设备简单、重量轻,可以与载重量较小的 UAV 很好地适配,而 UAV 也在无源定位领域开始发挥越来越重要的作用^[14-18]。在执行任务的过程中,单一无人机存在成功率相对较低、容错率低以及在紧急情况下应对能力较差的问题。无人机群具有高立体性和高信息性,可以将其作为无源定位的载体进而发挥团体协作优势,实现对目标的实时监控和定位。采用无人机群进行无源定位的方式具有成本低、定

位精度高、反应时间短等优势。能够有效解决采用雷达数字信号进行无源定位时存在的时差以及通信尺度不唯一的问题。

纯方位无源定位可作为无人机编队飞行过程中有效减少向外发射电磁波信号的方案。在该方法中,部分无人机向外发射信号,其余无人机接收并实现目标的定位。然而现有的纯方位量测模式下仍存在问题,如多 UAV 协同定位以及对跟踪快速移动的目标时误差不能收敛到零。因此,对于如何提高针对快速移动目标的定位精度和减小定位误差有待研究^[19-23]。

本文基于三角函数原理进行了无源定位问题的推导,建立了无人机编队定位的几何模型,并利用三角函数关系结合解析法,讨论了仅已知部分无人机编号的情况;之后基于几何模型给出了无人机编队初始略有偏差的调整策略;在编队队形发生改变的情况下,利用解析几何构建定位模型,实现新队形下的精确定位。

1 问题描述

研究最常见的无人机圆形编队,一架无人机(编号为 F_0)位于圆心处,其余无人机(编号 $F_1 \sim F_N$)均匀分布在某圆周上,整个编队的无人机在飞行时均保持在同一高度。

问题 A:位于圆心的无人机 F_0 和编队中另 2 架无人机发射信号,其余位置略有偏差的无人机接收信号,当发射信号的无人机位置无偏差且编号已知时,如何确定接收信号的无人机的定位模型?

问题 B:某位置略有偏差的无人机除了接收到 F_0 和 F_1 发射的信号,还另接收到编队中编号未知的无人机发射的信号,若发射信号的无人机位置无偏差,除 F_0 和 F_1 外,如何确定能实现无人机有效定位的需要发射信号的无人机数量?

问题 C:若圆形编队的半径为 100 m,且初始时刻无人机的位置略有偏差。现要求选择 F_0 无人机和圆周上的最多 3 架无人机来发射信号,其余无人机接收信号并调整到理想位置,使所有无人机最终均匀分布在某个圆周上,如何设计出具体的无人机位置调整方案? 本文符号含意见表 1。

表 1 符号说明
Tab.1 Symbol description

符号	说明	单位
R	无人机圆形编队的半径	m
r	圆周上无人机偏差范围圆的半径	m
P_i^n	编号为 i 的无人机第 n 次调整前的极坐标位置	/
Q_i	编号为 i 的无人机最终目标位置极坐标(基准位置)	/

2 研究方法

2.1 模型假设

被动接收信息的无人机的位置“略有偏差”是指:偏差没有小到可以基本认为在目标位置,也没有大到无法判断其他各个无人机的相对位置。处于某一较小的合适范围。不考虑无人机内接收信息测量夹角的传感器接收信息的噪声以及测量角度的误差。同时,为阐述清晰,以中等规模的无人机编队为例,选取无人机架数为 10 架。

2.2 模型建立

问题 A 的分析:在问题 A 中,初始为圆形编队,各自编号已知,且基准队形固定,圆心的 F_0 无人机及圆周上发射信号的无人机位置不会有偏差,圆周上其余不发射电磁波的无人机位置略有偏差,且无人机仅能探测各个信号之间的夹角信息。由于圆心的无人机始终会发射信号,与其余圆周上的两架无人机始终会构成以半径为腰的等腰三角形,各个三角形之间可以仅仅利用顶角大小区分。如上,可建立极坐标系,依据发射信号的三架无人机构成的等腰三角形顶角的大小来进行分类讨论。同时,其余某一无人机与三点连线的夹角也为已知量。在极坐标体系下,结合正弦定理等三角学定理列出方程组,可解出接收信号无人机的极坐标,即可实现依据接收信号的无源定位。针对接收信号的无人机所处的区域不同,直线 OA 、 OB 、 AB 将整个平面分为若干个区域(见图 1)。对于 $\angle OAB$ 和 $\angle OBA$ 的对角的内部这两个在圆外的范围,由于无人机在出现位置偏差时的偏差程度很小(为“略有偏差”的程度),因此认为无人机不可能出现在这两个区域。因此只需分析图 1 所示的 4 种情况即可,分别对应 P_1 、 P_2 、 P_3 、 P_4 ,而这 4 种情况分别表示接收信号的无人机位于 ΔOAB 中 OA 边以下的区域(情况 1), ΔOAB 中 OB 边左上方的区域(情况 2), $\angle AOB$ 内部的区域(情况 3)以及 $\angle AOB$ 的对顶角内部的区域(情况 4)。

本文设 OA 为极坐标极轴,由于理想情况下,均匀分布在圆周上的两相邻无人机与圆心连线的夹角最小为 $\beta=(360/9)^\circ$,并且此时发射信号的无人机位置无偏差,故此时 $\angle AOB = (k-1)\beta, k \in \{2, 3, 4, 5\}$ 。

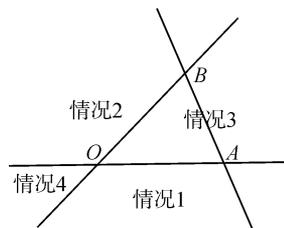


图 1 问题 A 三个方位偏差情况示意图

Fig. 1 Question A schematic diagram of three azimuth deviations

对于情况 1,如图 2 所示,设 P_1 极坐标为 (ρ_1, θ_1) , $\rho_1 > 0, \theta_1 \in (0, 2\pi)$,故 $\angle AOP_1 = 2\pi - \theta_1$ 。

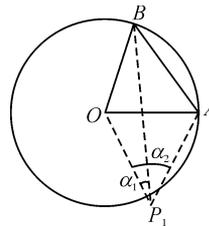


图 2 问题 A 情况 1

Fig. 2 Question A case 1

如图,由几何关系可得:

$$\angle OBP_1 = \pi - \alpha_1 - (2\pi - \theta_1) - \angle AOB \quad (1)$$

$$\angle OAP_1 = \pi - \alpha_2 - (2\pi - \theta_1) \quad (2)$$

故在 ΔP_1OB 中,由正弦定理可得:

$$\frac{\sin \alpha_1}{R} = \frac{\sin[\pi - \alpha_1 - (2\pi - \theta_1) - (k-1)\beta]}{\rho_1} \quad (3)$$

在 ΔP_1OA 中,由正弦定理可得:

$$\frac{\sin \alpha_2}{R} = \frac{\sin[\pi - \alpha_2 - (2\pi - \theta_1)]}{\rho_1} \quad (4)$$

解得:

$$\begin{cases} \theta_1 = \arctan \frac{\sin \alpha_2 \sin[\alpha_1 + (k-1)\beta] - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2}{\sin \alpha_2 \cos[\alpha_1 + (k-1)\beta] - \sin \alpha_1 \cos \alpha_2} \\ \rho_1 = \frac{\sin(\alpha_2 - \theta_1)}{\sin \alpha_2} \end{cases} \quad (5)$$

对于情况 2,如图 3 所示,设 P_2 极坐标为 (ρ_2, θ_2) , $\rho_2 > 0, \theta_2 \in (0, 2\pi)$ 。

如图 3,由几何关系可得:

$$\angle OBP_2 = \pi - \alpha_1 - (\theta_2 - \angle AOB) \quad (6)$$

$$\angle OAP_2 = \pi - \alpha_2 - \theta_2 \quad (7)$$

故在 ΔP_2OB 中,由正弦定理可得:

$$\frac{\sin \alpha_1}{R} = \frac{\sin\{\pi - \alpha_1 - [\theta_2 - (k-1)\beta]\}}{\rho_2} \quad (8)$$

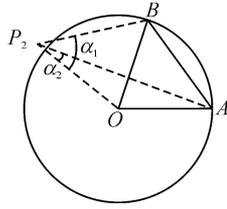


图 3 问题 A 情况 2
Fig. 3 Question A case 2

在 ΔP_2OA 中,由正弦定理可得:

$$\frac{\sin\alpha_2}{R} = \frac{\sin(\pi - \alpha_2 - \theta_2)}{\rho_2} \quad (9)$$

解得:

$$\begin{cases} \theta_2 = \arctan \frac{\sin\alpha_2 \sin[\alpha_1 - (k-1)\beta] - \sin\alpha_1 \sin\alpha_2}{\sin\alpha_1 \cos\alpha_2 - \sin\alpha_2 \cos[\alpha_1 - (k-1)\beta]} \\ \rho_2 = \frac{\sin(\alpha_2 + \theta_2)}{\sin\alpha_2} R \end{cases} \quad (10)$$

对于情况 3,如图 4 所示,设 P_3 极坐标为 (ρ_3, θ_3) , $\rho_3 > 0, \theta_3 \in (0, 2\pi)$ 。

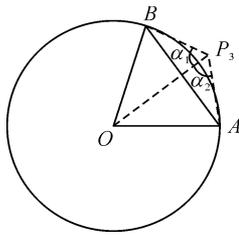


图 4 问题 A 情况 3 之一
Fig. 4 Question A one of case 3

由几何关系可得:

$$\angle OBP_3 = \pi - \alpha_1 - (\angle AOB - \theta_3) \quad (11)$$

$$\angle OAP_3 = \pi - \alpha_2 - \theta_3 \quad (12)$$

而当 P_3 位于 ΔAOB 内时,如图 5 所示,各角度关系不发生改变,故模型方程不变。

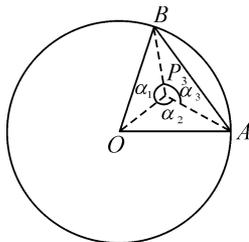


图 5 问题 A 情况 3 之二
Fig. 5 Question A two of case 3

故在 ΔP_3OB 中,由正弦定理可得:

$$\frac{\sin\alpha_1}{R} = \frac{\sin\{\pi - \alpha_1 - [(k-1)\beta - \theta_3]\}}{\rho_3} \quad (13)$$

在 ΔP_3OA 中,由正弦定理可得:

$$\frac{\sin\alpha_2}{R} = \frac{\sin(\pi - \alpha_2 - \theta_3)}{\rho_3} \quad (14)$$

解得:

$$\begin{cases} \theta_3 = \arctan \frac{\sin\alpha_2 \sin[\alpha_1 + (k-1)\beta] - \sin\alpha_1 \sin\alpha_2}{\sin\alpha_2 \cos[\alpha_1 + (k-1)\beta] + \sin\alpha_1 \cos\alpha_2} \\ \rho_3 = \frac{\sin(\alpha_2 + \theta_3)}{\sin\alpha_2} R \end{cases} \quad (15)$$

对于情况 4,如图 6 所示,设 P_4 极坐标为 (ρ_4, θ_4) , $\rho_4 > 0, \theta_4 \in (0, 2\pi)$,故 $\angle AOP_4 = 2\pi - \theta_4$ 。

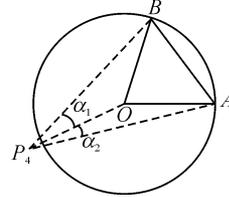


图 6 问题 A 情况 4
Fig. 6 Question A case 4

由几何关系可得:

$$\angle OBP_4 = \pi - \alpha_1 - (\theta_4 - \angle AOB) \quad (16)$$

$$\angle OAP_4 = \pi - \alpha_2 - (2\pi - \theta_4) \quad (17)$$

故在 ΔP_4OB 中,由正弦定理可得:

$$\frac{\sin\alpha_1}{R} = \frac{\sin\{\pi - \alpha_1 - [\theta_4 - (k-1)\beta]\}}{\rho_4} \quad (18)$$

在 ΔP_4OA 中,由正弦定理可得:

$$\frac{\sin\alpha_2}{R} = \frac{\sin[\pi - \alpha_2 - (2\pi - \theta_4)]}{\rho_4} \quad (19)$$

解得:

$$\begin{cases} \theta_4 = \arctan \frac{\sin\alpha_1 \sin\alpha_2 - \sin\alpha_2 \sin[\alpha_1 - (k-1)\beta]}{\sin\alpha_2 \cos[\alpha_1 - (k-1)\beta] + \sin\alpha_1 \cos\alpha_2} \\ \rho_4 = \frac{\sin(\alpha_2 - \theta_4)}{\sin\alpha_2} R \end{cases} \quad (20)$$

上述 4 种情况涵盖了接收信号的无人机的几乎所有飞行范围。而具体的求解过程是在两个三角形中运用正弦定理,再将两个方程联立,得到关于 ρ 和 θ 的二元方程组,即可求出接收信号的无人机的具体位置。即为关于被动接收信号的无人机的定位模型。

问题 B 的分析:问题 B 依旧以 10 架无人机为例,编队仍为圆形编队,但此时,除 F_0, F_1 以外的其余无人机都失去了编号信息。由第一问的机理分析,编号信息可以使接收信号无人机与基准圆形对应得出提前存储的此时的目标角度,即为无人机调整的目标角度;还可使无人机对照基准圆形得出信号源飞机的位置从而进行定位。编号信息为定位模型的基本信息,不可缺失。因此,此问题可转化为:通过再加入多少架没有编号这一定位信息的无人机,可判断出某一架无人机的编号,从而实现三点定

位。因此,本问无人机需要具有判断未知编号无人机与 F_0 和 F_1 之间信号夹角的相对大小从而判断编号的能力。考虑接收信号无人机偏差极小与偏差极大两种极限情况,加入的无人机架数与接收信号无人机的偏差范围有关。由此,本问要设定偏差范围的大小,即设定偏差范围的解析表达式,同时由于 F_0 、 F_1 两条信号夹角固定,因此该点的可能位置将在一个圆弧上活动,也可得出其解析表达式。因此,本问采用解析法,通过对于活动范围的解析式,判断另外到来的信号通路是否具有唯一性;若不具有,则添加对应个数。

除 F_0 、 F_1 外,无人机接收到的信号中,失去了编

$$\begin{cases} p(a,b) \\ F_0(0,0) \Rightarrow \odot H: x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \\ F_1(R,0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -R \\ B = \frac{aR - a^2 - b^2}{b} \\ C = 0 \end{cases} \quad (21)$$

同时, P 点的偏差范围需在 $\odot H$ 内,因此 $P(a,b)$ 需满足:

$$[a - R\cos(40^\circ)]^2 + [b - R\sin(40^\circ)]^2 \leq r^2 \quad (22)$$

则弧 \widehat{AS} 的范围可表示为:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - Rx + \frac{Ra - a^2 - b^2}{b}y = 0 \\ [a - R\cos(40^\circ)]^2 + [b - R\sin(40^\circ)]^2 \leq r^2 \end{cases} \quad (23)$$

$$\widehat{F_3} \begin{cases} x = -x + (a - R\cos(80^\circ)) \\ y = -y + (b - R\sin(80^\circ)) \end{cases} \text{代入} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - Rx + \frac{Ra - a^2 - b^2}{b}y = 0 \\ [a - R\cos(40^\circ)]^2 + [b - R\sin(40^\circ)]^2 \leq r^2 \end{cases} \quad (24)$$

$$y - b = k(x - a) \quad k \in (-\infty, +\infty) \quad (25)$$

当 k 取不同值时,射线可扫过整个平面(模拟无人机探测信号过程),分别将射线方程与按公式(24)所示方式列出的 $F_3 \sim F_9$ 弧段方程联立,判断解的个数,之后取最多的个数,即为某个视角下会存在的干扰数量。若要消除干扰,需使得互相干扰的无人机全部为发信号的无人机。同时可知,当 P 点坐标 (a,b) 固定时,上述每个方程组联立后可转化为一元二次方程,利用根的判别式即可判定解的个数,即可得出某个视角下会存在的干扰数量。

问题C的分析:依然延续10架无人机的圆形编队,但发射信号的无人机并不固定,阵型初始与基准阵型(9架飞机均在圆上)略有偏差,每次选择 F_0 及圆周上至多三架无人机发射信号,实现全部无人机的纯方位无源定位,同时做出相应调整,使整个编队的所有无人机能够慢慢达到理想位置。由于编号已知,且 F_0 始终为发射信号无人机之一,而其余的无人机均在圆周附近,因此可考虑沿用问题A中的三点定位法,在圆周上再选取两个无人机发射信号,即可实现夹角信息到坐标信息的转换。由于无人机

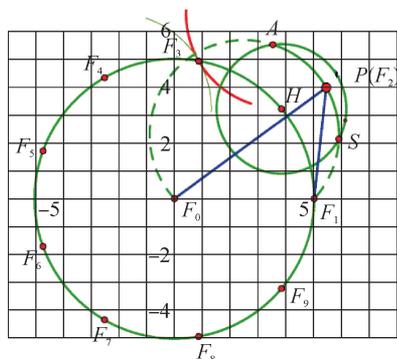


图7 问题B解析法示意图

Fig. 7 Question B schematic diagram of analytical method

其余 $F_4 \sim F_9$ 弧段的解析表示同理,每个弧段的物理意义可表示为:若 P 位置固定,其余无人机将有如此的移动范围。从接收信号无人机引出一条射线,表示信号探测器的探测路径,若此路径同时与多个弧段有交点,则表示会发生信号干扰,因此,所有与此路径相交的弧段上的那架无人机,都需给 P 发送信号。采用解析判定方法,射线方程如下:

无法理解坐标信息,仅存储正确的夹角信息,因此每次依据发射信号无人机仅仅会将夹角调整为自己“认为”正确的存储值,而无法得知发射信号无人机是否处于圆形编队的正确位置。因此,调整策略的选取不同,也将会导致整体收敛情况的不同(甚至有可能无法收敛)。由于调整目的为使队伍收敛至正确位置,因此,若采取三角定位法,两架圆周上的发射信号无人机的选取需为整个圆周上偏差最小的。首先依次检查并选出最小偏差的 3 架无人机,再依次调整,计算调到的坐标,之后再次依次检查,开始下一次迭代。最终整体偏差程度将收敛到某一很小的值。具体迭代调整流程如图 8 所示。

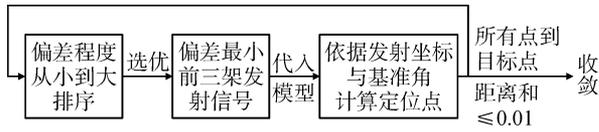


图 8 问题 C 调整迭代流程
Fig. 8 Question C adjust the iteration process

无人机每次调整位置后的所在位置为 $P_{in}(\rho_{in}, \theta_{in})$, $i \in \{0, 1, \dots, 9\}$, $n \in Z^+$ 。如图 9 所示,无人机的目标位置即为基准阵型各自位置,基准目标位置记为 Q_i 。

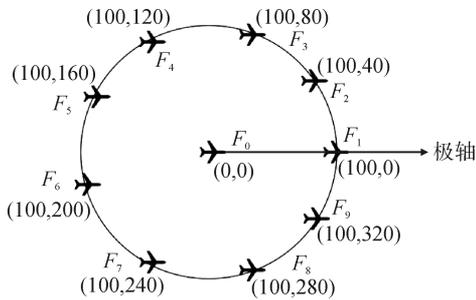


图 9 无人机编队基准位置
Fig. 9 Benchmark position of UAV formation

$$\min \sum_{i=1}^9 |P_i^n Q_i| \quad i \in \{0, 1, \dots, 9\}, n \in Z^+ \quad (26)$$

即让所有点到目标点的距离之和尽可能小。调整前:易知,发射信号无人机偏差越小,基于此的定位调整也将向更优的方向发展。因此在每次调整前,先筛选与目标位置偏差较小的无人机。观察初始位置得知: $P_1 = Q_1$, 即初始时刻 F_1 无偏差,在每轮开始的选择当中总会被选取成为发射信号的无人机。且由于问题 A 模型:三架编号已知的无人机即可实现全编队定位,因此,初始筛选过程可等效为:

$$\min\{|P_i^n Q_i|\} = P_k^n Q_k \quad i \in \{2, 3, \dots, 9\}, k \in \{2, 3, \dots, 9\} \quad (27)$$

则选取的发射信号的无人机为:

$$F_0 : P_0^n(\rho_0^n, \theta_0^n), \quad F_1 : P_1^n(\rho_1^n, \theta_1^n), \quad F_k : P_k^n(\rho_k^n, \theta_k^n) \quad (28)$$

调整时:如图 10,此时已确定发射信号的无人机坐标,接收信号的无人机可探测得出两个夹角 α_1 、 α_2 的大小。同时,无人机只能感知并处理夹角信息,因此,位置的调整过程为:将此时探测的夹角调整为存储的对应基准阵型的正确夹角。此时,该无人机将有如下调整过程。

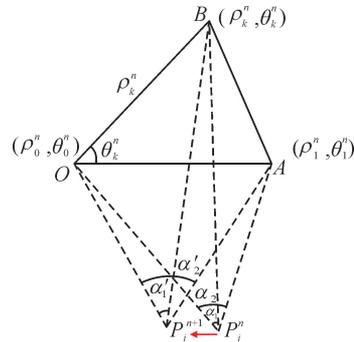


图 10 问题 C 某无人机接受信息后调整前后
Fig. 10 Question C before and after adjustment of a UAV after receiving information

由于发射信号无人机编号已知,此时对应基准阵型的夹角 α'_1 、 α'_2 即为已知量,即为基准阵型上的 F_0 、 F_1 、 F_k 与 F_i 的夹角,如图 10 所示。

$$\begin{cases} \alpha'_1 = \langle (F_0)(F_i), (F_k)(F_i) \rangle \\ \alpha'_2 = \langle (F_0)(F_i), (F_1)(F_i) \rangle \end{cases} \quad (29)$$

无人机完成依据夹角信息的自主调整后,由于下一次调整前,需重新评估各无人机偏差情况,并选择发射信号的无人机。因此调整后需计算此时的极坐标定位。如图 11 所示几何模型。

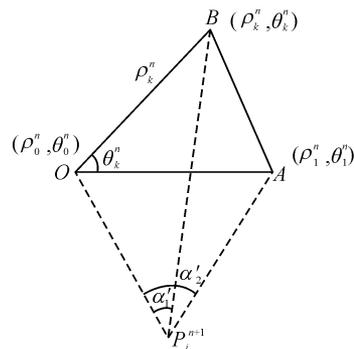


图 11 无人机调整后的几何模型
Fig. 11 Geometric model of UAV after adjustment

与问题 A 模型相比,此时 $OB = \rho_{nk}$, $OA = \rho_{n1}$, $\angle BOA = \theta_{nk}$, 求解方法不变。因此,可用问题 A 的模型,解方程组求解,具体分为以下 4 种情况。

情况 1:

$$\begin{cases} \frac{\sin \alpha'_1}{\rho_k^n} = \frac{\sin[\pi - \alpha'_1 - (2\pi - \theta_1) - \theta_k^n]}{\rho_1} \\ \frac{\sin \alpha'_2}{\rho_1^n} = \frac{\sin[\pi - \alpha'_2 - (2\pi - \theta_1)]}{\rho_1} \end{cases} \quad (30)$$

情况 2:

$$\begin{cases} \frac{\sin \alpha'_1}{\rho_k^n} = \frac{\sin[\pi - \alpha'_1 - (\theta_2 - \theta_k^n)]}{\rho_2} \\ \frac{\sin \alpha'_2}{\rho_1^n} = \frac{\sin(\pi - \alpha'_2 - \theta_2)}{\rho_2} \end{cases} \quad (31)$$

情况 3:

$$\begin{cases} \frac{\sin \alpha'_1}{\rho_k^n} = \frac{\sin[\pi - \alpha'_1 - (\theta_k^n - \theta_3)]}{\rho_3} \\ \frac{\sin \alpha'_2}{\rho_1^n} = \frac{\sin(\pi - \alpha'_2 - \theta_3)}{\rho_3} \end{cases} \quad (32)$$

情况 4:

$$\begin{cases} \frac{\sin \alpha'_1}{\rho_k^n} = \frac{\sin[\pi - \alpha'_1 - (\theta_n - \theta_k^n)]}{\rho_3} \\ \frac{\sin \alpha'_2}{\rho_1^n} = \frac{\sin[\pi - \alpha'_2 - (2\pi - \theta_4)]}{\rho_4} \end{cases} \quad (33)$$

3 研究结果与分析

3.1 问题 A 的模型结果分析

在问题 A 中,由于接收信号的无人机所接收到的方向信息仅仅是与发射信号的无人机连线之间的夹角,因此这是一个纯方位无源定位方法的应用^[4],建立基于角度关系和正弦定理的几何模型。发射信号的无人机是位于圆心的 F_0 以及位于半径为 R 的圆周的另两架无人机,为便于计算和分析,不妨设定其中一架无人机为 F_1 。考虑到圆形编队的对称性,由此设定另一架无人机为 $F_2 \sim F_5$ 中的某一架,设其为 $F_k, k \in \{2, 3, 4, 5\}$ 。当发射信号的 3 架无人机为 F_0, F_1, F_k 时,设无人机 F_0 所处的相对位置为极坐标系的坐标原点 $(0, 0)$,无人机 F_1 所处的相对位置为 A 点 $(R, 0)$ (即位于极轴上),无人机 $F_k, k \in \{2, 3, 4, 5\}$ 所处的相对位置为 B。设接收信号的无人机位于 $P(\rho, \theta)$ 。规定半径 OB 在 $\triangle POB$ 中的对角为 α_1 ,半径 OA 在 $\triangle POB$ 中的对角为 α_2 ,角 α_3 为 PA 和 PB 之间的夹角。此外,由于理想情况下均匀分布在圆周上的两相邻无人机与圆心连线的夹角为 $\beta = 40^\circ$,并且此时发射信号的无人机位置无偏差,故此时 $\angle AOB = (k-1)\beta, k \in \{2, 3, 4, 5\}$ 。

为验证前文建立的定位模型的正确性和准确性,现分别取 4 种典型位置 α_1 和 α_2 的值作为某接收信号的无人机的方向信息,使之分别位于 4 种情况下的飞行区域,并分别代入方程组求解 ρ 和 θ ,最后将求解结果与预期结果作比较,验证该无人机的位

置是否在圆周附近,即可完成对定位模型的验证。

设圆形编队的半径 $R = 50$ m,求出各个情况下 ρ 和 θ 的数值解。

如图 12(a)所示,当 $\alpha_1 = 37^\circ, \alpha_2 = 70^\circ$ 时,求得 $\rho_1 = 53.1248$ m, $\theta_1 = 336.7499^\circ$,为情况 1 下的位置。

如图 12(b)所示,当 $\alpha_1 = 73^\circ, \alpha_2 = 38^\circ$ 时,求得 $\rho_2 = 52.0779$ m, $\theta_2 = 102.1152^\circ$,为情况 2 下的位置。

如图 12(c)所示,当 $\alpha_1 = 44^\circ, \alpha_2 = 35^\circ$ 时,求得 $\rho_3 = 68.9311$ m, $\theta_3 = 17.2670^\circ$,为情况 3 下的位置。

如图 12(d)所示,当 $\alpha_1 = 24^\circ, \alpha_2 = 20^\circ$ 时,求得 $\rho_4 = 41.2580$ m, $\theta_4 = 216.3901^\circ$,为情况 4 下的位置。

分析可得,该接收信号的无人机与圆心之间的距离 ρ 在一定的偏差范围内,均非常接近于 R ,因此可以表明该定位模型的正确性和准确性。

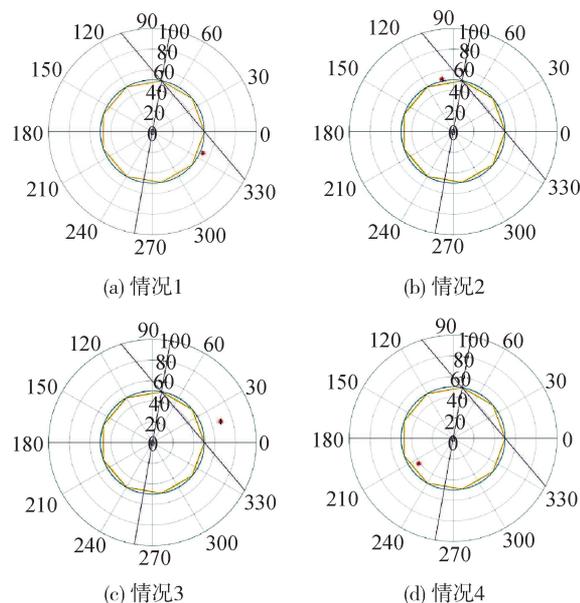


图 12 问题 A 模型计算数据结果

Fig. 12 Question A model calculation data results

3.2 问题 B 的模型结果分析

分析两种较为极限的情况:第一,若无人机仅在周围极小范围内发生位置偏差,则其他无编号无人机发来的各条信号角度相对独立,差距较大,可认为,只要其他某一架无人机发送信号,即可直接依据与已知两条信号的相对位置关系判断编号。第二,若无人机在周围较大范围内发生位置偏差,则其他无编号无人机发来的各条信号角度差距会较小,距离若超出一定程度甚至无法分辨各条信号路径差距,即使其余全部发送信号,在接收无人机也如同一

条信号,无法判断任何一个编号。可以得出,需再加入的无人机个数,与原队型中接收信号无人机的偏差范围有关,且呈大致正相关关系,即:接收信号无人机偏差范围越大,需要再加入发射信号的无人机数量将越多。建立基于无人机感知方位判定编号的解析模型,考虑如图 13 的任意一种情况,来推导解析法的可解性。精确做出各个曲线,偏移范围 $\odot H$ 半径依次增大,做出与 $\widehat{AS}AS$ 相对应的七条弧,从 P 点引出射线,旋转与之相交,如图 13 所示。

号,无人机即可判定编号从而定位。如图 13(b)所示 r/R 为 0.29 时,存在两架无人机相互干扰,因此需至少任意加入两架发射信号的无人机。如图 13(c)所示 r/R 为 0.44 时,有 3 架无人机相互干扰,因此需至少任意加入 3 架发射信号的无人机。如图 13(d)所示 r/R 为 0.6 时,有 4 架无人机相互干扰,因此需至少任意加入 4 架发射信号的无人机。以此类推,随着偏差范围 r 继续增大,最终将趋向于即使全部加入也无法满足定位。

无人机的位置略有偏差,在列出的 4 种情况中取偏差较小的情况,可以认为:还需两架无人机发射信号,就可实现有效定位。

3.3 问题 C 的模型结果分析

问题 C 中,依据部分发射信号的无人机,实现纯方位无源定位并调整,最终要求各无人机慢慢达到理想位置。由于需要调整过程慢慢向初始基准阵型收敛,由问题 A 可知,无人机已存储与发射信号无人机正确的夹角信息,同时可探测此时自己与各个发射信号无人机的夹角,探测后将采取对应调整。因此易知,若每次发射信号的无人机为整个编队中偏差最小的无人机,依据此调整可使得其余偏差略大的无人机向基准位置收敛。同时可知各次调整之间相互独立,无互相影响。依据模型过程,首先对于问题 C 给定的初始位置做筛选,选出除 F_0 、 F_1 外偏差最小的无人机作为发射信号无人机。之后依据表格顺序,依次确定其余无人机,针对发射信号无人机的基准 α'_1 、 α'_2 的大小,同时确定属于问题 A 中划分的何种情况,之后带入对应情况的方程组计算。每次调整后的坐标,将作为下一次调整的初始坐标,逐次迭代。具体求解结果如表 2 所示。

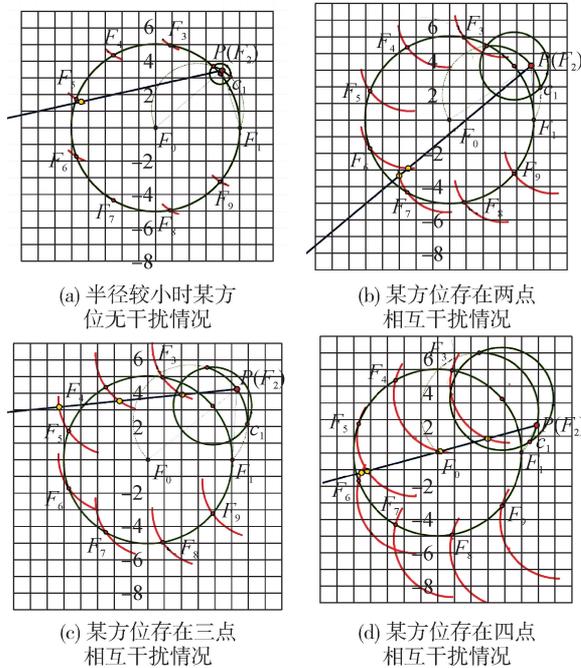


图 13 问题 B 计算数据结果

Fig. 13 Question B calculation data results

用 r 与 R 比值来衡量偏差范围半径的大小:如图 13(a)所示 r/R 为 0.1 时,任意加入 1 架发射信

表 2 问题 C 的调整方案

Tab. 2 Question C adjustment strategy

无人机编号	无人机调整方案极坐标表示(m,°)
0	(0,0)→位置无偏差
1	(100,0)→位置无偏差
2	(98.00,40.10)→(98.00,40.10)→(100.09,176.06)→(99.95,40.08)→(100.01,40.00)→(100.01,40.00)→(100.01,40.00)→…值不再变化
3	(112.00,80.21)→(96.61,82.24)→(128.52,50.18)→(99.88,80.11)→(128.57,50.00)→(100.05,79.94)→(100.05,79.94)→…值不再变化
4	(105.00,119.75)→(96.56,121.11)→(128.26,110.11)→(99.84,120.06)→(197.08,50.03)→(100.18,119.92)→(100.18,119.92)→…值不再变化
5	(98.00,159.86)→(97.69,160.21)→(99.75,160.01)→(99.75,160.01)→(288.57,19.99)→(100.25,159.95)→(100.25,159.95)→…值不再变化

表 2(续)

无人机编号	无人机调整方案极坐标表示(m,°)
6	(112.00, 199.96)→(99.73, 199.94)→(99.73, 199.94)→(99.78, 200.01)→(197.10, 349.98)→(100.29, 200.01)→(100.29, 200.01)→…值不再变化
7	(105.00, 240.07)→(101.50, 240.48)→(68.40, 229.94)→(99.75, 239.92)→(128.59, 349.99)→(100.27, 240.04)→(100.27, 240.04)→…值不再变化
8	(98.00, 280.17)→(102.32, 281.59)→(65.24, 259.95)→(100.01, 279.93)→(100.02, 196.29)→(100.14, 280.06)→(100.14, 280.06)→…值不再变化
9	(112.00, 320.28)→(101.63, 322.73)→(68.55, 290.10)→(100.01, 320.00)→(100.01, 320.00)→(100.03, 320.04)→(100.03, 320.04)→…值不再变化

表 2 中右侧每个坐标表示一次迭代结束后的调整后坐标,箭头表述转换关系,共进行了 20 次迭代。可以看到,由于 F_0 、 F_1 两架无人机始终会被选取,因此全程无调整(实际也无需调整),符合规律。之后对于 $F_2 \sim F_9$ 号无人机,坐标随着迭代次数不断变化,虽然中间某些无人机存在某次调整后偏差反而较大的情况,最终可以看出,所有编号无人机在第 6 到 7 次迭代后,均稳定在了非常接近目标点的位置(表中省略号“…”表示之后结果相同)。

图 14 为每次迭代计算得出的 10 架无人机平均偏差随迭代次数的变化情况,平均偏差与上表规律一致。初始时刻出现短暂波动后,最终总体偏差可收敛至近似 0 值。

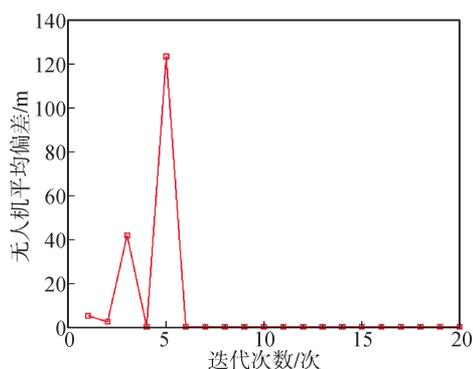


图 14 无人机调整后的几何模型偏差

Fig. 14 Geometric model deviation of UAV after adjustment

4 结 论

针对仅能接收夹角信息的无源定位问题,基于三角函数推导,建立了圆形编队中定位的几何模型,并利用三角函数关系结合解析法,讨论了仅已知部分无人机编号的情况;之后基于几何模型给出了编队初始略有偏差的调整策略;在编队队形发生改变的情况下,利用解析几何构建定位模型,实现新队形下的精确定位。

问题 A 通过对于平面的划分展开分类讨论,基于严谨的数学几何解三角形计算,建立接收信号无人机的定位模型,结果具有较高的准确性。

问题 B 中构建的基于无人机感知方位判定编号的解析模型,充分考虑到了接收信号的无人机的位置偏差大小与增加数量的关系,具有较好的普适性和一般性。

问题 C 基于贪心策略,构建迭代调整模型,模型与解决问题的适配程度较高。

全文只考虑了三点定位,未探究更多点定位带来的精度提升对定位的影响。

参考文献:

- [1] 王海风,赵东涛,王浩. 无源探测与定位系统发展综述[J]. 科技创新与应用, 2014(18): 24-25.
- [2] 戴文瑞,王锐,魏巍. 基于 5G 基站信号的被动雷达无源定位方法分析[J]. 舰船电子工程, 2022, 42(3): 81-83, 141.
DAI Wenrui, WANG Rui, WEI Wei. Analysis of passive radar passive location method based on 5G base station signal[J]. Ship Electronic Engineering, 2022, 42(3): 81-83, 141.
- [3] 郭福成. 基于运动学原理的单站无源定位与跟踪关键技术研究[D]. 中国人民解放军国防科学技术大学, 2002.
GUO Fucheng. Research on the key technology of single station passive positioning and tracking based on kinematic principle[D]. People's Liberation Army National University of Defense Technology, 2002.
- [4] 牛刚,杜太行,高婕,等. 小载荷无人机无源定位技术研究[J]. 火力与指挥控制, 2021, 46(4): 38-42.
NIU Gang, DU Taihang, GAO Jie, et al. Research on the passive location technology of the unmanned aerial vehicle with small load[J]. Fire Control & Command Control, 2021, 46(4): 38-42.
- [5] 文富忠,赵和鹏,胥全春,等. 电子战无人机双机无源交叉

- 定位误差分析[J]. 电子信息对抗技术, 2019, 34(3):1-6.
- WEN Fuzhong, ZHAO Hepeng, XU Quanchun, et al. Error analysis for passive locating of dual electronic warfare UAV [J]. *Electronic Information Warfare Technology*, 2019, 34(3):1-6.
- [6] 骆明伟, 檀立刚. 机载红外设备多平台协同探测无源定位方法[J]. *应用光学*, 2021, 42(3):392-397.
- LUO Mingwei, TAN Ligang. Method of passive location based on multi-platform collaborative detection by airborne infrared equipment[J]. *Journal of Applied Optics*, 2021, 42(3): 392-397.
- [7] 张杰. 目标辐射源多站无源定位关键技术研究[D]. 南京: 解放军信息工程大学, 2015.
- ZHANG Jie. Multi-station passive localization technology based on radiation source[D]. Nanjing: PLA Information Engineering University, 2015.
- [8] 李海静, 王立刚. 远程空空导弹机弹协同无源定位技术研究[J]. *现代防御技术*, 2016, 44(1):17-21.
- LI Haijing, WANG Ligang. Passive location by aircraft-missile cooperation for long-range air to air missile [J]. *Modern Defence Technology*, 2016, 44 (1): 17-21.
- [9] 朱颖童. 多站无源定位技术研究[D]. 西安: 西安电子科技大学, 2017.
- ZHU Yingtong. Study on passive localization technology using multiple sensors[D]. Xi'an: Xidian University, 2017.
- [10] 吴魏. 多站无源时频差高精度定位技术研究[D]. 南京: 解放军信息工程大学, 2015.
- WU Wei. Research on high accuracy passive localization using TDOA and FDOA with multiple receivers [D]. Nanjing: PLA Information Engineering University, 2015.
- [11] 翁志汉. 基于无源多传感器的多目标定位跟踪技术的研究[D]. 成都: 电子科技大学, 2014.
- WENG Zhihan. Research on location and tracking technology of multi-target based on passive multi-sensor[D]. Chengdu: University of Electronic Science and Technology of China, 2014.
- [12] 赵国伟. 高精度机载单站无源定位技术研究[D]. 西安: 西北工业大学, 2007.
- ZHAO Guowei. Research on the technology of high precision passive location by airborne single station[D]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University, 2007.
- [13] 刘星艳. 广义相关时延估计在无源时差定位中的研究与应用[D]. 兰州: 兰州交通大学, 2015.
- LIU Xingyan. The research and application about generalized correlation in passive TDOA location [D]. Lanzhou: Lanzhou Jiaotong University, 2015.
- [14] 屈小媚, 刘韬, 谈文蓉. 基于多无人机协作的多目标无源定位算法[J]. *中国科学: 信息科学*, 2019, 49(5): 570-584.
- QU Xiaomei, LIU Tao, TAN Wenrong. Multi-source passive localization via multiple unmanned aerial vehicles[J]. *Scientia Sinica(Informationis)*, 2019, 49(5): 570-584.
- [15] 蔡伟, 张晓峰. 一种无人机群协同无源定位资源优化调度方法[J]. *舰船电子对抗*, 2018, 41(3):54-58.
- CAI Wei, ZHANG Xiaofeng. A resource optimization scheduling method for cooperative passive location of UAVs [J]. *Shipboard Electronic Countermeasure*, 2018, 41(3): 54-58.
- [16] 王本才, 王国宏, 何友. 多站纯方位无源定位算法研究进展[J]. *电光与控制*, 2012, 19(5):56-62.
- WANG Bencai, WANG Guohong, HE You. Progress of research on multi-sensor bearing-only passive locating algorithm [J]. *Electronics Optics & Control*, 2012, 19(5): 56-62.
- [17] 张莞玲, 赵莲莲. 基于无人机群的频率步进雷达数字信号无源定位方法[J]. *自动化与仪器仪表*, 2022(6): 61-65.
- ZHANG Guanling, ZHAO Lianlian. Passive location method of digital signal of frequency stepping radar based on unmanned aircraft group[J]. *Automation & Instrumentation*, 2022(6): 61-65.
- [18] 檀立刚, 骆明伟, 李捷, 等. 无人机光电设备对地目标单站无源定位方法[J]. *应用光学*, 2022, 43(4): 599-610.
- TAN Ligang, LUO Mingwei, LI Jie, et al. Method of single-station passive location to ground target by UAV photoelectric equipment [J]. *Journal of Applied Optics*, 2022, 43(4): 599-610.
- [19] LIU Y F, WANG Y H. Theory and experiment of enclosing control for second-order multi-agent systems [J]. *IEEE Access*, 2020(8): 186530-186539.
- [20] ZHAO S Y, LI Z H, DING Z T. Bearing-only formation tracking control of multiagent systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2019, 64 (11): 4541-4554.
- [21] CHU X Y, LIANG Z C, LI Y Y. Trajectory optimization for rendezvous with bearing-only tracking[J]. *Acta Astronautica*, 2020(171): 311-322.
- [22] DEGHAT M, SHAMES I, ANDERSON B D O, et al. Localization and circumnavigation of a slowly moving target using bearing measurements[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2014, 59(8): 2182-2188.
- [23] DEGHAT M, XIA L, ANDERSON B D O, et al. Multitarget localization and circumnavigation by a single agent using bearing measurements[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2015, 25 (14): 2362-2374.