

DOI:10.19322/j.cnki.issn.1006-4710.2021.01.009

多级行星轮系结构与运动拓扑模型的图形符号描述方法及其运动学分析

王均刚¹, 杨士男¹, 刘燕德¹, 曾礼平¹, 墨蕊娜²

(1. 华东交通大学 机电与车辆工程学院, 江西 南昌 330013; 2. 华东交通大学 理学院, 江西 南昌 330013)

摘要: 由于多级行星轮系包含的构件多, 结构复杂, 使得对其传动系统的结构特征与运动学分析变得十分困难。本文提出了多级行星轮系结构与运动拓扑模型的图形符号描述新方法, 该方法通过引入描述多级行星轮系结构拓扑模型和运动拓扑模型的新图形符号, 利用图形符号表示出多级行星轮系中各构件以及构件之间的联接特征; 通过定义拓扑演变方式和转换规则, 建立能够完整描述多级行星轮系结构特征与运动特性信息的图形符号拓扑模型, 实现了多级行星齿轮机构与拓扑模型的一一对应关系。研究表明, 该方法能够建立多级行星轮系结构-运动的图形符号拓扑模型, 可以比较直观地反映出多级行星轮系的结构特征, 简化了多级行星轮系的同构识别以及运动学分析。研究结果可为多级行星轮系的创新设计和分析提供一种简单可行的新途径。

关键词: 图论; 拓扑模型; 行星齿轮系; 运动学分析

中图分类号: TH112.3

文献标志码: A

文章编号: 1006-4710(2021)01-0064-07

Graphic symbol description method for the structure and motion topological model of multi-stage planetary gear train and kinematic analysis

WANG Jungang¹, YANG Shinan¹, LIU Yande¹, ZENG Liping¹, MO Ruina²

(1. School of Mechatronics & Vehicle Engineering, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China;

2. School of Basic Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: It is very difficult to analyze the structural characteristics and kinematics of its transmission system of the multi-stage planetary gear system containing many components and complex structure. In this paper, a new method for describing the structure and motion topological model of multistage planetary gear train is proposed, with a new graphic symbol introduced to describe the structural and kinematic topological models of multi-stage planetary gear system, which is used to represent the connection characteristics of each component and between components in the multi-stage planetary gear system. By defining the topological evolution mode and transformation rules, according to the topological evolution mode and transformation rules, the structural characteristics of multi-stage planetary gear system can be completely described. The one-to-one correspondence between the multi-stage planetary gear mechanism and the topological model is realized by the graph symbol topological model with the motion characteristic information. The research results show that using this method can build a graph symbol topological model of multi-stage planetary gear system structure motion, which can directly reflect the structural characteristics of multi-stage planetary gear system, simplifying the isomorphic identification and kinematic analysis of multi-stage planetary gear system. It provides a simple and feasible new way

收稿日期: 2019-08-09; 网络出版日期: 2020-09-02

网络出版地址: <https://kns.cnki.net/kcms/detail/61.1294.n.20200902.1334.002.html>

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51765020); 江西省自然科学基金资助项目(20161BAB206153)

第一作者: 王均刚, 男, 博士, 副教授, 研究方向为行星齿轮传动设计分析。E-mail: sduhys@163.com

for the innovative design and analysis of multi-stage planetary gear trains.

Key words: graph theory; topology model; planetary gear trains; kinematics analysis

行星齿轮传动因其特殊的结构和优良的传动性而被广泛应用于各种机械传动系统。与单级行星轮系相比,多级行星轮系的结构复杂,包含的构件更多,对多级行星轮系的分析设计十分困难^[1-2]。

国内外学者日益重视应用图形符号对行星轮系进行结构拓扑分析,提出了丰富的图论表示方法^[3-6]。薛隆泉等^[7]基于功能离散法提出行星轮系的拓扑图转化理论,通过拓扑变换过程、借用不同的符号表示出行星轮系中各构件以及构件间不同的联接特征,最终形成以点、线组成的图形,但其在整体结构拓扑性表达方面存在欠缺。雷亚荣^[8]在文献^[7]基础上,完善了拓扑图的转化理论,确立行星轮系系统化研究的图形模型,见图1,但是其对构件的符号表示以及构件间的联接性质仍未作到明确的区分,整体结构情况不完整,缺少机架与其他构件的联接关系,各构件间的联接特征不明确,齿轮内啮合和外啮合无法进行区分。

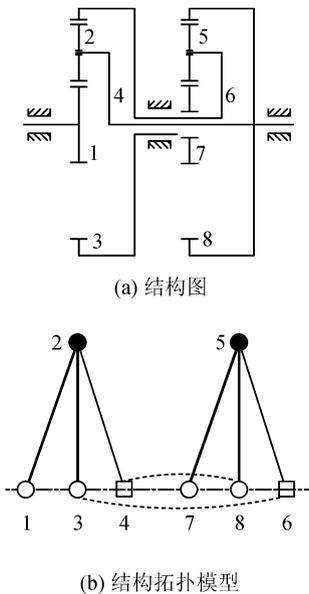


图1 两级行星轮系结构图及结构拓扑模型^[8]
Fig.1 Structure diagram and structural topology model of two-stage planetary gear trains^[8]

文献^[9-12]基于图论理论,对行星齿轮传动机构进行构型方案设计。Ding等^[13]提出了新双色拓扑图和三色拓扑图的方法,并在平面连杆机构的构型综合中取得了很好的效果。李斌等^[14]引入新三色拓扑图对行星齿轮机构进行结构描述,见图2,运用新三色拓扑图对行星轮系进行拓扑描述时,虽然能够明确地体现出各构件间的联接特征以及构件的

性质,但轮系的整体结构特性反映不太明确。

为了使运算复杂、难以掌握的行星轮系运动学分析变得更为简单和直观,一些研究者采用图形化方法对行星轮系的运动学进行了分析。Tsai等^[15]运用方块图法对行星轮系的运动特性进行了分析。Gomà Ayats等^[16]针对行星轮系中各构件之间的运动关系以及整个传动系统的传动比分配,提出了一种超图法。Salgado等^[17]基于图形表示法对具有多构件的行星轮系功率流与传动效率进行了分析。Gao等^[18]在行星轮系中引入速度拓扑图的概念,研究了传动比和拓扑之间的关系。符升平等^[19]基于图论理论,提出了一种更适用于计算机建模和求解的行星轮系传动性能分析方法。

由文献可知,采用图形符号能够简化行星轮系的结构设计和运动学分析。但是,用于研究行星轮系结构特征以及运动特性的各类图形化表示呈现发散式研究,各有千秋。尽管有学者研究了统一拓扑描述模型的平面机构的表示方法^[20],但目前公开发表的文献尚无针对多级行星轮系的结构特征及运动特征信息运用完善的图形符号进行表示,并且对多级的行星轮系进行结构和运动拓扑描述时相对困难,甚至无法作出其拓扑图。

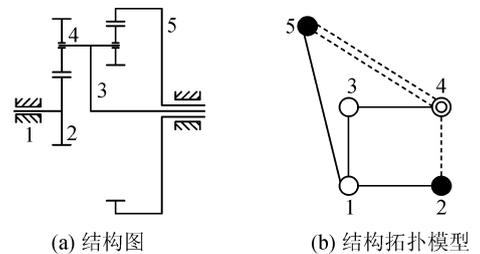


图2 单级行星轮系结构图及结构拓扑模型^[14]

Fig.2 Structure diagram and structural topology model of single-stage planetary gear trains^[14]

本文在已有的研究基础上,提出了对多级行星轮系的结构特征及运动特征信息运用完善的图形符号进行表示方法,该方法能够对多级的行星轮系进行结构和运动拓扑模型进行描述。通过对行星轮系中各构件以及各构件之间的联接关系进行相关的图形符号定义,规定了演化规则及转换方式,提出了能够完整描述行星轮系整体结构特征、运动特性和构件性质明确的统一图形符号表达方法,为行星轮系在实际分析设计过程中提供一种新的方式。其具体分析过程见图3。

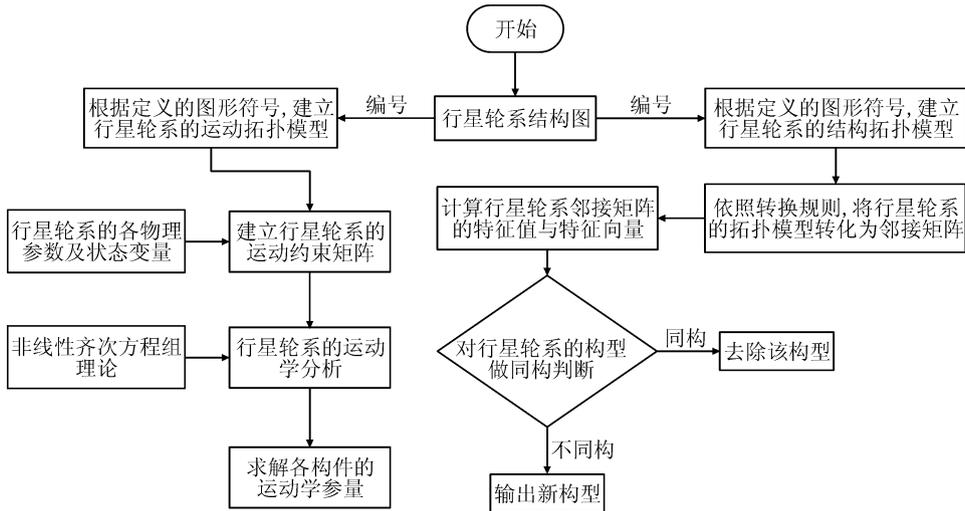


图3 行星轮系拓扑模型建立分析流程图

Fig. 3 Flow chart for analyzing the topology model of planetary gear trains

1 描述行星轮系统新图形符号及其转换规则

应用图论理论对行星轮系进行研究,需要满足以下两种情况:1)拓扑模型反映的行星轮系的整体结构情况是否完整;2)拓扑模型反映的行星轮系的运动性质情况是否明确。同时,这两种情况是根据以下三方面的指标进行分析:①图形的运动拓扑反映是否明确,运动拓扑性具体指轮系各构件间的联接特征;②图形中构件性质是否明确,构件性质具体指轮系中构件的区分度和所属功能;③图形的整体结构拓扑特性反映是否明确,整体结构拓扑特性具体指不同性质的构件所属的层不同。

一般而言,行星轮系是由太阳轮、行星轮、内齿圈、行星架以及机架所组成的传动系统。基于拓扑图转化理论,将行星轮系中各构件转化为不同的图形符号进行描述。

1) 各功能构件符号描述:实心点●表示单行星轮、复合实心点●表示双联行星轮;空心点○表示太阳轮;空心方框□表示行星架;实心方框■表示内齿圈;空心三角形△表示机架。

2) 各功能构件的联接关系转化规则:细实线表示回转副;单啮合线表示齿轮外啮合联接;双啮合线表示齿轮内啮合联接,忽略机架与基本构件之间的固结。

3) 根据行星轮系的基本回路特性,在图画的表示中,图形符号表示的基本回路为应满足基本回路数目等于系统的齿轮副数目,且由表示三个基本构件的图形符号、表示齿轮副图形符号、两个回转副图形符号构成的封闭回路。

2 基于新图形符号的多级行星轮系统结构与运动拓扑模型

2.1 多级行星轮系统结构拓扑模型

根据上述中各构件的图形符号定义,现建立图4中两级行星轮系的结构拓扑模型。

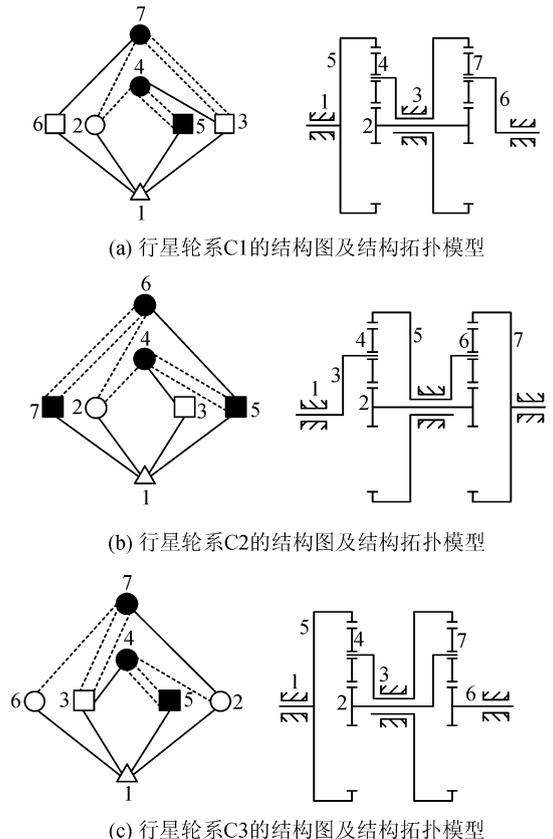


图4 两级行星轮系结构图及结构拓扑模型

Fig. 4 Structure diagram and structural topology model of two-stage planetary gear trains

将行星轮系的结构图转化为结构拓扑模型表示,其主要优点之一是便于建立行星轮系的邻接矩阵^[12],对行星齿轮机构进行同构性判断。行星轮系的邻接矩阵形式以及转换规则为:

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n \times n} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & 0 & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,n} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,j} & \cdots & 0 & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中: n 为机构的构件数,矩阵元素 a_{ij} ($i, j = 0, 1, 2, \dots, n$)。若构件 i, j 以回转副联接,则 $a_{ij} = 1$;若构件 i, j 以外啮合齿轮副联接,则 $a_{ij} = 2$;若构件 i, j 以内啮合齿轮副联接,则 $a_{ij} = 3$;若构件 i, j 以外啮合齿轮副联接且含有双联行星轮时,则 $a_{ij} = 4$;若构件 i, j 以内啮合齿轮副联接且含有双联行星轮时,则 $a_{ij} = 5$;其余, $a_{ij} = 0$ 。

根据式(1),建立图4中两级行星轮系C1、C2和C3的邻接矩阵 \mathbf{A} ,即:

$$\mathbf{A}_{C1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\mathbf{A}_{C2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\mathbf{A}_{C3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

通过编程,分别计算出邻接矩阵 \mathbf{A} 的特征值及特征向量,具体计算结果见表1~3(其中,第一列为特征值 λ ,其右方为与该特征值相对应的特征向量 $\phi, \phi = [\phi_i]^T, i = 1, \dots, 7$)。通过对比邻接矩阵的特征值和特征向量进行行星齿轮机构之间的同构判断^[21]。

通过对比行星轮系C1、C2和C3的邻接矩阵的特征值与特征向量,可知C1与C2的邻接矩阵的特征值完全相同,并且同一特征值所对应的特征向量其各元素对应相等或比例,例如 $\lambda_3 = -0.6997$ 所对应的特征向量: $\phi_1 \leftrightarrow (-\phi_1), \phi_2 \leftrightarrow (-\phi_2), \phi_3 \leftrightarrow (-\phi_3), \phi_4 \leftrightarrow (-\phi_4), \phi_5 \leftrightarrow (-\phi_5), \phi_6 \leftrightarrow (-\phi_6), \phi_7 \leftrightarrow (-\phi_7)$,因此,可以判断行星轮系C1与C2为同构运动链;行星轮系C3与C1或C2,首先其邻接矩阵的特征值就不相等,不满足判断条件,因此,行星轮系C3与C1或C2之间的为非同构运动链。

表1 邻接矩阵 \mathbf{A}_{C1} 的特征值和特征向量

Tab. 1 Eigenvalues and eigenvectors of adjacent matrix \mathbf{A}_{C1}

特征值 λ	特征向量 ϕ						
	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4	ϕ_5	ϕ_6	ϕ_7
-4.9508	0.2703	-0.4279	-0.4279	0.4620	-0.3346	-0.1479	0.4620
-2.6458	0.0000	0.0000	0.3780	0.5000	-0.5669	0.1890	-0.5000
-0.6997	-0.6534	-0.1589	-0.1589	0.1911	0.1143	0.6606	0.1911
0.0000	0.0000	0.7638	-0.5455	0.0000	-0.3273	0.1091	-0.0000
0.6997	0.6534	-0.1589	-0.1589	-0.1911	0.1143	0.6606	-0.1911
2.6458	-0.0000	-0.0000	0.3780	-0.5000	-0.5669	0.1890	0.5000
4.9508	0.2703	0.4279	0.1479	0.4620	0.4279	0.4620	0.3346

表 2 邻接矩阵 A_{C_2} 的特征值和特征向量
Tab. 2 Eigenvalues and eigenvectors of adjacent matrix A_{C_2}

特征值 λ	特征向量 ϕ						
	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4	ϕ_5	ϕ_6	ϕ_7
-4.950 8	0.270 3	-0.427 9	-0.147 9	0.462 0	-0.427 9	-0.462 0	0.334 6
-2.645 8	-0.000 0	0.000 0	-0.189 0	0.500 0	-0.378 0	0.500 0	0.566 9
-0.699 7	0.653 4	0.158 9	-0.660 6	-0.191 1	0.158 9	-0.191 1	-0.114 3
0.000 0	0.000 0	-0.763 8	-0.109 1	0.000 0	0.545 5	-0.000 0	0.327 3
0.699 7	-0.653 4	0.158 9	-0.660 6	0.191 1	0.158 9	0.191 1	-0.114 3
2.645 8	-0.000 0	0.000 0	0.189 0	0.500 0	0.378 0	-0.500 0	-0.566 9
4.9508	0.270 3	0.427 9	0.147 9	0.462 0	0.427 9	0.462 0	0.334 6

表 3 邻接矩阵 A_{C_3} 的特征值和特征向量
Tab. 3 Eigenvalues and eigenvectors of adjacent matrix A_{C_3}

特征值 λ	特征向量 ϕ						
	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4	ϕ_5	ϕ_6	ϕ_7
-4.777 5	0.290 6	-0.347 1	-0.442 5	0.455 8	-0.347 1	-0.251 6	0.455 8
-3.000 0	-0.000 0	-0.166 7	0.333 3	0.500 0	-0.500 0	0.333 3	-0.500 0
-0.418 6	-0.644 6	0.067 5	-0.423 3	0.205 5	0.067 5	0.558 3	0.205 5
-0.000 0	-0.000 0	0.833 3	-0.166 7	-0.000 0	-0.500 0	-0.166 7	-0.000 0
0.418 6	0.644 6	0.067 5	-0.423 3	-0.205 5	0.067 5	0.558 3	-0.205 5
3.000 0	-0.000 0	0.166 7	-0.333 3	0.500 0	0.500 0	-0.333 3	-0.500 0
4.777 5	-0.290 6	-0.347 1	-0.442 5	0.455 8	-0.347 1	-0.251 6	-0.455 8

2.2 多级行星轮系的运动拓扑描述模型

行星轮系的运动拓扑模型是反映其运动状态的特征模型。无论是单级行星齿轮传动或多级行星齿轮传动都可以分解为外啮合和内啮合两种基本运动功能单元,见图 5,其中 p 表示行星轮、s 表示太阳轮、r 表示内齿圈、c 表示行星架。

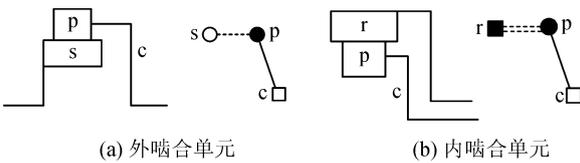


图 5 行星齿轮基本运动单元

Fig. 5 Basic motion unit of planetary gear trains

以每个基本运动单元转化为定轴轮系后的传动比为特征,根据行星齿轮机构中基本运动单元内各构件的运动关系建立其转速方程:

$$\begin{cases} \text{(外啮合单元)} L_1: \omega_a + i_{ab}^c \omega_b - (1 + i_{ab}^c) \omega_c = 0 \\ \text{(内啮合单元)} L_2: \omega_a - i_{ab}^c \omega_b - (1 - i_{ab}^c) \omega_c = 0 \end{cases} \quad (5)$$

式中: ω 表示啮合单元各构件的角速度; a 表示啮合单元的主动构件, b 表示啮合单元的从动构件, c 表示行星架; i_{ab}^c 为构件 a 和构件 b 相对于行星架 c 的传动比, $i_{ab}^c = \frac{z_b}{z_a}$, 其中 z_a 为主动轮齿数, z_b 为从动轮齿数。

3 运动分析实例

为了验证多级行星轮系结构与运动拓扑模型的图形符号描述新方法的有效性和简单直观性,以图 6(a)所示的复式行星齿轮机构为例进行运动学实例分析。复式行星传动系统由复式太阳轮 2、复式行星架 3、复式行星轮 4、复式内齿圈 5、复式双联行星轮 6 和 6' 和太阳轮 7 组成,其动力传递分为两路:一路为复式行星架 3 带动复式行星轮 4、复式双联行星轮中的行星轮 6 与分别与复式内齿圈 5 和复式太阳轮 2 啮合传动;另一路为复式行星架 3 带动复式双联行星轮中的行星轮 6' 与太阳轮 7 啮合传动。通过建立其运动拓扑模型,并进行基本运动单元划分,分别对各构件的转速 ω 以及系统的总传动比进行求解。

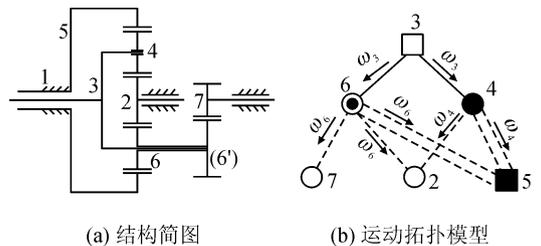


图 6 复式行星齿轮传动机构

Fig. 6 Compound planetary gear trains

根据图 6(b)中的运动拓扑模型可知,其基本运动单元为:1(3-4-5)、2(3-4-2)、3(3-6-5)、4(3-6'-7)。根据式(5),建立轮系的角速度约束方程:

$$\begin{cases} \omega_4 - i_{45}^3 \omega_5 - (1 - i_{45}^3) \omega_3 = 0 \\ \omega_6 - i_{65}^3 \omega_5 - (1 - i_{65}^3) \omega_3 = 0 \\ \omega_6 + i_{62}^3 \omega_2 - (1 + i_{62}^3) \omega_3 = 0 \\ \omega_6' + i_{6'7}^3 \omega_7 - (1 + i_{6'7}^3) \omega_3 = 0 \\ \omega_5 = 0 \\ \omega_3 = \omega_{in} \end{cases} \quad (6)$$

式中: ω_{in} 表示复式行星架的输入角速度。将式(6)写成矩阵的形式:

$$\begin{bmatrix} 0 & -(1 - i_{45}^3) & 1 & -i_{45}^3 & 0 & 0 \\ 0 & -(1 - i_{65}^3) & 0 & -i_{65}^3 & 1 & 0 \\ i_{62}^3 & -(1 + i_{62}^3) & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -(1 + i_{6'7}^3) & 0 & 0 & 1 & i_{6'7}^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \\ \omega_5 \\ \omega_6 \\ \omega_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \omega_{in} \end{bmatrix} \quad (7)$$

倘若取复式太阳轮 2、复式行星轮 4、复式双联行星轮 6 和 6'、复式内齿圈 5 和太阳轮 7 的齿轮齿数分别为 $Z_2=12$ 、 $Z_4=14$ 、 $Z_5=40$ 、 $Z_6=14$ 、 $Z_6'=16$ 和 $Z_7=20$,复式行星架的输入转速 $\omega_{in}=18$ r/min,则其转速方程为:

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{26}{14} & 1 & -\frac{40}{14} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{26}{14} & 0 & -\frac{40}{14} & 1 & 0 \\ \frac{12}{14} & -\frac{26}{14} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{36}{16} & 0 & 0 & 1 & \frac{20}{16} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \\ \omega_5 \\ \omega_6 \\ \omega_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 18 \end{bmatrix} \quad (8)$$

根据非齐次线性方程组理论,利用 MATLAB 计算出各构件的转速如下: $\omega_2=78$ r/min, $\omega_3=18$ r/min, $\omega_4=-33.4286$ r/min, $\omega_5=0$ r/min, $\omega_6=-33.4286$ r/min, $\omega_7=59.1429$ r/min。传动比 $i=\omega_7/\omega_3=3.285$ 。分析结果与转化机构法计算的结果一致^[22]。

4 结论

在现有的研究成果基础上,提出了描述多级行星轮系结构特征与运动特性信息的新图形符号表示,基于新图形符号建立了多级行星齿轮的结构拓扑模型和运动拓扑模型,实现了多级行星齿轮机构

与拓扑模型的一一对应关系。运动拓扑模型揭示了组成运动回路的各构件之间的运动关系和系统整体的运动特性,根据行星轮系的基本运动单元,并结合非齐次方程组理论快速简洁地求出轮系中各个运动学参量,有利于对行星轮系传动性能系统化的研究。该图形描述方法能够清晰且完整地表达各构件的属性和拓扑关系,将计算机无法识别储存的行星齿轮机构转换成可识别储存的数字邻接矩阵,有利于进行行星轮系的创新和综合。

参考文献:

- [1] 王均刚,杨士男,刘燕德,等. 行星齿轮主要设计理论与分析方法及均载特性综述[J]. 华东交通大学学报, 2019,36(2):111-118.
WANG Jungang, YANG Shinan, LIU Yande, et al. Overview on main design theory and load sharing characteristics of planetary gear trains[J]. Journal of East China Jiaotong University, 2019, 36(2): 111-118.
- [2] 张会明. 一种分析周转轮系变速器的新方法[J]. 华东交通大学学报, 2000,17(2):69-75.
ZHANG Huiming. A new method for the analysis of epicyclic transmission[J]. Journal of East China Jiaotong University, 2000,17(2): 69-75.
- [3] PENNASTRI E, FREUDENSTEIN F. The mechanical efficiency of epicyclic gear trains[J]. Journal of Mechanical Design, 1993, 115(3): 645-651.
- [4] OLSON D G, ERDMAN A G, RILEY D R. Topological analysis of single-degree-of-freedom planetary gear trains[J]. Journal of Mechanical Design, 1991, 113(1): 10-16.
- [5] CHATTERJEE G, TSAI L W. Computer-aided sketching of epicyclic-type automatic transmission gear trains [J]. Journal of Mechanical Design, 1996, 118(3): 405-411.
- [6] CHEN Darzen, YAO Kangli. Topological synthesis of fractionated geared differential mechanisms[J]. Journal of Mechanical Design, 2000, 122(4): 472-477.
- [7] 薛隆泉,汪友明,王慧武,等. 周转轮系分类及综合[J]. 中国机械工程, 2005,16(19):1716-1722.
XUE Longquan, WANG Youming, WANG Huiwu, et al. Classification and synthesis of epicyclic gear trains [J]. China Mechanical Engineering, 2005, 16(19): 1716-1722.
- [8] 雷亚荣. 周转轮系系统化研究的图论方法[D]. 西安: 西安理工大学, 2007.
LEI Yarong. Graph theory method for the systematized research of epicyclic gear trains[D]. Xi'an: Xi'an University of Technology, 2007.
- [9] 张召. Ravigneaux 式行星齿轮传动机构构型综合与性

- 能分析[D]. 秦皇岛:燕山大学,2017.
- ZHANG Zhao. The synthesis and analysis of planetary gear transmission mechanisms of ravnigneaux automatic transmission[D]. Qinhuangdao: Yanshan University, 2007.
- [10] 马雅丽,张永珍. 复杂轮系基本单元的运动特征状态数学建模[J]. 中国机械工程,2014,25(15):1999-2003.
- MA Yali, ZHANG Yongzhen. Kinematic characteristic state models for basic units of compound gear train [J]. China Mechanical Engineering, 2014, 25(15): 1999-2003.
- [11] 杨亚联,米娇,胡晓松,等. 混合动力汽车行星耦合传动系统的图论建模及动力学分析[J]. 汽车工程, 2015,37(1):9-15,54.
- YANG Yalian, MI Jiao, HU Xiaosong, et al. Graph theory modeling and dynamics analysis on the coupled planetary transmission system of HEV[J]. Automotive Engineering, 2015, 37(1): 9-15, 54.
- [12] 薛会玲. 自动变速器行星齿轮传动方案设计及性能分析研究[D]. 西安:西北工业大学,2017.
- XUE Huiling. Schematic design and performance analysis of planetary gear transmission for automatic transmission[D]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University,2017.
- [13] DING Huafeng, ZHAO Jing, HUANG Zhen. Unified topological representation models of planar kinematic chains[J]. Journal of Mechanical Design, 2009,131(11): 114503.
- [14] 李斌,孙涛,宋轶民,等. 多排行星齿轮动力耦合器的构型综合方法[J]. 天津大学学报,2016,49(1):35-45.
- LI Bin, SUN Tao, SONG Yimin, et al. Multi-row planetary gear based configuration synthesis of power coupler[J]. Journal of Tianjin University, 2016, 49(1): 35-45.
- [15] TSAI Miching, HUANG Chengchi, LIN Borjeng. Kinematic analysis of planetary gear systems using block diagrams[J]. Journal of Mechanical Design. 2010, 132(6): 065001.
- [16] GOMÀ AYATS J R, DIEGO-AYALA U, CANELA J M, et al. Hypergraphs for the analysis of complex mechanisms comprising planetary gear trains and other variable or fixed transmissions [J]. Mechanism and Machine Theory, 2012, 51: 217-229.
- [17] SALGADO D R, DEL CASTILLO J M. Analysis of the transmission ratio and efficiency ranges of the four-, five-, and six-link planetary gear trains [J]. Mechanism and Machine Theory, 2014, 73: 218-243.
- [18] GAO Mingfei, HU Jibin. Kinematic analysis of Planetary gear trains based on topology[J]. Journal of Mechanical Design, 2018, 140(1): 012302.
- [19] 符升平,李胜波,罗宁. 基于图论的自动变速器拓扑变换和传动特性分析[J]. 上海交通大学学报,2018,52(3):348-355.
- FU Shengping, LI Shengbo, LUO Ning. Topological transformation and transmission characteristic analysis of vehicle auto transmission based on graph theory[J]. Journal of Shanghai Jiaotong University, 2018, 352(3): 348-355.
- [20] 丁华锋,黄真. 平面机构统一拓扑描述模型的建立及同构判别[J]. 机械工程学报,2009,45(3):99-103.
- DING Huafeng, HAUNG Zhen. Uniform topological representation model of planar mechanisms and isomorphism identification[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2009, 45(3): 99-103.
- [21] CUBILLO J P, WAN Jinbao. Comments on mechanism kinematic chain isomorphism identification using adjacent matrices[J]. Mechanism and Machine Theory, 2005, 40(2): 131-139.
- [22] 饶振刚. 行星齿轮传动设计[M]. 北京:化工工业出版社,2003.

(责任编辑 王绪迪)