DOI: 10.19322/j. cnki. issn. 1006-4710. 2017. 01. 016

基于级别高于关系的区间犹豫模糊决策新方法

王亚萍[1]，王秋萍[1]，熊国强[2]

(1. 西安理工大学 理学院,陕西 西安 710054; 2. 西安理工大学 经济与管理学院,陕西 西安 710054)

摘要：区间犹豫模糊集提供了表示不确定性信息的适当工具,针对决策信息为区间犹豫模糊元的决策问题,构建了基于级别高于关系的区间犹豫模糊决策新方法。首先,引入区间犹豫模糊元相离度的概念和区间犹豫模糊元的距离测度公式。然后,基于可能度与相离度的概念定义区间犹豫模糊和谐集、不和谐集及其相应的指数。鉴于传统的 ELECTRE Ⅱ 方法中阈值的选择对决策结果比较敏感的缺点,通过改进的 ELECTRE 方法实现备选方案的择优问题。最后通过具体算例表明所提出方法的可行性与有效性。

关键词：级别高于关系；区间犹豫模糊集；相离度；ELECTRE Ⅱ 方法

中图分类号：C934 **文献标志码**：A **文章编号**：1006-4710(2017)01-0086-07

A novel method for decision-making with the interval-valued hesitant fuzzy set based on outranking relation

WANG Yaping[1], WANG Qiuping[1], XIONG Guoqiang[2]

(1. School of Sciences, Xi'an University of Technology, Xi'an 710054, China;
2. School of Economics and Management, Xi'an University of Technology, Xi'an 710054, China)

Abstract: The interval-valued hesitant fuzzy set provides a suitable means to express uncertain information. Aiming at the decision-making information being the interval-valued hesitant fuzzy element in the process of decision-making, a novel method is constructed for decision making with interval-valued hesitant fuzzy set based on outranking relation. Firstly, the concepts of the deviation degree and the distance measure for interval-valued hesitant fuzzy element are introduced. Then the interval-valued hesitant fuzzy concordance sets, discordance sets, and its corresponding indices are constructed based on the concepts of the possibility degree and deviation degree. For the reason that the choice of threshold values of classical ELECTRE Ⅱ method is sensitive to the decision result, a modified version of the ELECTRE method is used to obtain the optimal alternative. Finally, the proposed method is applied to an illustrative example to demonstrate its practicality and effectiveness.

Key words: outranking relation; interval-valued hesitant fuzzy sets; deviation degree; ELECTRE Ⅱ method

多属性决策在经济,管理等领域有着广泛的应用背景[1-3],现实中的多属性决策问题往往具有模糊性。自 1965 年 Zadeh[4] 提出了模糊集理论以来,模糊多属性决策得到了迅速发展。随着研究内容的不断深入,模糊集的几种扩展形式相继被提出。其中犹豫模糊集[5] 作为模糊集的扩展形式之一,它允许某个元素对于集合的隶属度以[0,1]上几个可能值的集合的形式给出。然而随着社会的发展以及决策问题的不断复杂化,决策者想要对方案做出精确的数值评价较为困难,利用区间数代替精确数值则是一种更为实用的方法。2013 年,Chen 和 Xu[6] 提出了区间犹豫模糊集的概念,该集合允许某个元素对集合的隶属度以[0,1]上几个可能的区间数集合的形式给出,从而在一定程度上避免了决策中的信息损失。此后区间犹豫模糊环境下的多属性决策就成了国内外学者的研究热点。

收稿日期：2016-05-09

基金项目：国家自然科学基金资助项目(71173171);国家自然科学基金青年科学基金资助项目(11601419);西安理工大学校博士启动金资助项目(109-400211201)

作者简介：王亚萍,女,硕士生,研究方向为模糊决策方法及应用。E-mail:1432256030@qq.com

通讯作者：王秋萍,女,博士,教授,研究方向为预测技术与决策分析。E-mail:qpwang@xaut.edu.cn, wqp566@sina.com

级别高于方法(outranking method, OM)是一类解决多属性决策问题的重要方法[7-10]，ELECTRE方法作为级别高于方法的典型代表，已经成功地应用于多个领域，如人员甄选[11]，选址[12]，城市交通运输项目[13]等。文献[14]结合区间犹豫模糊集的信息表达优势和ELECTRE方法的思想，提出一种区间犹豫模糊ELECTRE(interval-valued hesitant fuzzy ELECTRE, IVHF ELECTRE)多属性决策方法。所提出的方法既充分利用了区间犹豫模糊信息，又保留了ELECTRE方法的优势，但从综合优势判定矩阵到方案排序的过程还可以进一步简化，以便决策者掌握和使用。文献[15]提出一种电子服务信息协商方法，其中涉及了一种改进的ELECTRE方法，该方法较文献[14]的方法步骤简洁，值得借鉴。ELECTRE Ⅱ是在ELECTRE Ⅰ的基础上构造方案对的级别高于关系及其指向图，通过迭代的方式对指向图分别进行正向排序与反向排序，并求其平均序实现备选方案的排序。文献[16]将ELECTRE Ⅱ方法扩展到决策信息为犹豫模糊集的情形，通过定义犹豫模糊和谐集与不和谐集的概念，并且构造强、弱级别高于关系，以此实现对方案的排序。

本文汲取文献[15]和文献[16]的优点，将ELECTRE方法扩展到决策信息为区间犹豫模糊集的情形，提出了一种基于级别高于关系的区间犹豫模糊(Interval-valued hesitant fuzzy set based on outranking relation, OR-IVHFS)决策新方法。在文献[16]的基础上，通过定义区间犹豫模糊和谐集、不和谐集及其相应的指数，并借助文献[15]的思想，对和谐性矩阵与不和谐性矩阵的余矩阵求Hadamard乘积得到优先关系矩阵，进而得到总优势矩阵，凭借总优势矩阵实现备选方案的排序。

1 基本概念

定义1[6] 令X为一给定的集合，$D[0,1]$表示区间$[0,1]$上的所有闭子区间组成的集合，X上的一个区间犹豫模糊集(interval-valued hesitant fuzzy sets, IVHFS)为：

$$A=\{<x_i,h_A(x_i)>\mid x_i\in X,i=1,2,\cdots,n\} \tag{1}$$

其中$h_A(x_i):X\rightarrow D[0,1]$表示元素$x_i\in X$对于集合$A$所有可能的区间隶属度。为了方便起见，称$h_A(x_i)$为一个区间犹豫模糊元(interval-valued hesitant fuzzy element, IVHFE)，记为：

$$h_A(x_i)=\{\gamma\mid\gamma\in h_A(x_i)\} \tag{2}$$

这里$\gamma=[\gamma^L,\gamma^U]$是一个区间数，$\gamma^L=\inf\gamma$和$\gamma^U=\sup\gamma$分别表示$\gamma$的下限和上限。

定义2[6] 对于一个区间犹豫模糊元h，$s(h)=\frac{1}{l_h}\sum_{\gamma\in h}\gamma$称为$h$的得分函数，其中$l_h$表示$h$中区间数的个数。$s(h)$是$[0,1]$的一个子区间。对于两个区间犹豫模糊元$h_1,h_2$，若$s(h_1)\geqslant s(h_2)$，则记为$h_1\geqslant h_2$。

定义3[6] 令$a=[a^L,a^U]$，$b=[b^L,b^U]$，$l_a=a^U-a^L$，$l_b=b^U-b^L$，则$a\geqslant b$的可能度为：

$$p(a\geqslant b)=\max\left\{1-\max\left(\frac{b^U-a^L}{l_a+l_b},0\right),0\right\} \tag{3}$$

定义4 设区间犹豫模糊元$h=\{\gamma\mid\gamma\in h\}$，其中$\gamma=[\gamma^L,\gamma^U]$，则$h$的相离度为：

$$\sigma(h)=\left[\frac{1}{2l_h}\sum_{\gamma\in h}(\gamma^L-s(h)^L)^2+(\gamma^U-s(h)^U)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{4}$$

其中l_h表示h中区间数的个数，$s(h)$为h的得分值。$\sigma(h)$反映了区间犹豫模糊元h中所有值与其均值的偏离程度。

通常情况下，不同的区间犹豫模糊元中的区间数的个数是不相同的，并且是没有顺序的。为了计算两个区间犹豫模糊元的距离，笔者对区间犹豫模糊元中的区间数按升序排列，令$l=\max\{l_{h_1},l_{h_2}\}$，其中$l_{h_1}$，$l_{h_2}$分别为区间犹豫模糊元$h_1$与$h_2$中区间数的个数。当$l_{h_1}\neq l_{h_2}$时，我们给所含区间数较少的区间犹豫模糊元添加元素，直到h_1与h_2中区间数的个数相同。如果$l_{h_1}<l_{h_2}$，依据悲观准则，给h_1添加h_1中的最小元素，直到h_1与h_2中区间数的个数相同；或者依据乐观准则，给h_1添加h_1中的最大的元素，直到h_1与h_2中区间数的个数相同[6]。本文依据乐观准则对区间犹豫模糊元进行扩充。

定义5[6] 令区间犹豫模糊元$h_1=\{\gamma_1\mid\gamma_1\in h_1\}$，$h_2=\{\gamma_2\mid\gamma_2\in h_2\}$的元素按升序排列，$\gamma_{1\sigma(i)}$，$\gamma_{2\sigma(i)}(i=1,2,\cdots,l)$分别表示$h_1$与$h_2$里第$i$小的值，则区间犹豫模糊元$h_1$与$h_2$的距离测度为：

$$d_1(h_1,h_2)=\frac{1}{2l}\sum_{i=1}^{l}(|\gamma_{1\sigma(i)}^L-\gamma_{2\sigma(i)}^L|+|\gamma_{1\sigma(i)}^U-\gamma_{2\sigma(i)}^U|) \tag{5}$$

$$d_2(h_1,h_2)=\left[\frac{1}{2l}\sum_{i=1}^{l}(|\gamma_{1\sigma(i)}^L-\gamma_{2\sigma(i)}^L|)^2+(|\gamma_{1\sigma(i)}^U-\gamma_{2\sigma(i)}^U|)^2\right]^{1/2} \tag{6}$$

其中$\gamma_{1\sigma(i)}=[\gamma_{1\sigma(i)}^L,\gamma_{1\sigma(i)}^U]$，$\gamma_{2\sigma(i)}=[\gamma_{2\sigma(i)}^L,\gamma_{2\sigma(i)}^U]$。

公式(5)，(6)分别被看作是在区间犹豫模糊环境下汉明距离与欧氏距离的扩展。

2 基于级别高于关系的区间犹豫模糊决策方法

设一个多属性决策问题的方案集 $A=\{A_1, A_2,\cdots, A_m\}$，属性集 $Z=\{z_1, z_2,\cdots, z_n\}$，$\boldsymbol{W}=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}$ 为属性的权重向量，满足 $w_j \in [0, 1]$ 且 $\sum_{j=1}^{n} w_j=1$，$h_{ij}(i=1, 2,\cdots, m; j=1, 2,\cdots, n)$ 表示第 i 个方案 A_i 对于第 j 个属性 z_j 可能的隶属度，区间犹豫模糊决策矩阵为 $\boldsymbol{H}=(h_{ij})_{m\times n}$。

2.1 区间犹豫模糊和谐性指数与不和谐性指数

受 Chen 和 Xu[16] 的启发本文给出如下定义。

定义 6 令 $J=\{1, 2,\cdots, n\}$，$p(h_{ij}, h_{kj})=p(s(h_{ij})\geqslant s(h_{kj}))$，按如下定义对属性序号进行分类：

区间犹豫模糊强和谐集 $J_{C_{ik}}$：$J_{C_{ik}}=\{j \mid p(h_{ij}, h_{kj})>p(h_{kj}, h_{ij})$ 且 $\sigma(h_{ij})<\sigma(h_{kj}), j\in J\}$；

区间犹豫模糊中等和谐集 $J_{C'_{ik}}$：$J_{C'_{ik}}=\{j \mid p(h_{ij}, h_{kj})>p(h_{kj}, h_{ij})$ 且 $\sigma(h_{ij})\geqslant\sigma(h_{kj}), j\in J\}$；

区间犹豫模糊弱和谐集 $J_{C''_{ik}}$：$J_{C''_{ik}}=\{j \mid p(h_{ij}, h_{kj})=p(h_{kj}, h_{ij})$ 且 $\sigma(h_{ij})<\sigma(h_{kj}), j\in J\}$；

区间犹豫模糊强不和谐集 $J_{D_{ik}}$：$J_{D_{ik}}=\{j \mid p(h_{ij}, h_{kj})<p(h_{kj}, h_{ij})$ 且 $\sigma(h_{ij})>\sigma(h_{kj}), j\in J\}$；

区间犹豫模糊中等不和谐集 $J_{D'_{ik}}$：$J_{D'_{ik}}=\{j \mid p(h_{ij}, h_{kj})<p(h_{kj}, h_{ij})$ 且 $\sigma(h_{ij})\leqslant\sigma(h_{kj}), j\in J\}$；

区间犹豫模糊弱不和谐集 $J_{D''_{ik}}$：$J_{D''_{ik}}=\{j \mid p(h_{ij}, h_{kj})=p(h_{kj}, h_{ij})$ 且 $\sigma(h_{ij})>\sigma(h_{kj}), j\in J\}$；

区间犹豫模糊无差异集 $J_{ik}^{=}$：$J_{ik}^{=}=\{j \mid p(h_{ij}, h_{kj})=p(h_{kj}, h_{ij})$ 且 $\sigma(h_{ij})=\sigma(h_{kj}), j\in J\}$。

区间犹豫模糊和谐性指数定义为：区间犹豫模糊和谐集与无差异集中属性的权重总和与所有属性的权重总和的比值，于是方案 A_i 与 A_k 的和谐性指数 c_{ik} 为[16]：

$$c_{ik}=\omega_C\times\sum_{j\in J_{C_{ik}}} w_j+\omega_{C'}\times\sum_{j\in J_{C'_{ik}}} w_j+\omega_{C''}\times\sum_{j\in J_{C''_{ik}}} w_j+\omega_{J^{=}}\times\sum_{j\in J_{ik}^{=}} w_j \tag{7}$$

这里 ω_C，$\omega_{C'}$，$\omega_{C''}$，$\omega_{J^{=}}$ 分别为区间犹豫模糊强和谐集，中等和谐集与弱和谐集以及无差异集的态度权重值，它们依赖于决策者的态度。从而可得和谐性矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ik})_{m\times m}$，$c_{ik}\in[0, 1]$ $(i,k=1,2,\cdots, m; i\neq k)$。元素 c_{ik} 越大，表示方案 $A_i \succ A_k$ 程度越大。

区间犹豫模糊不和谐性指数 d_{ik} 表示拒绝“方案 A_i 优于 A_k”这一论断的测度，即不和谐性强度的测度。方案 A_i 与 A_k 的不和谐性指数 d_{ik} 为[16]：

$$d_{ik}=\max_{j\in J_{D_{ik}}\cup J_{D'_{ik}}\cup J_{D''_{ik}}}\{\omega_D\times d(w_jh_{ij}, w_jh_{kj}), \omega_{D'}\times d(w_jh_{ij}, w_jh_{kj}), \omega_{D''}\times d(w_jh_{ij}, w_jh_{kj})\}/\max_{j\in J} d(w_jh_{ij}, w_jh_{kj}) \tag{8}$$

这里 ω_D，$\omega_{D'}$，$\omega_{D''}$ 分别表示三种不同类型的区间犹豫模糊不和谐集的权重，它们依赖于决策者的态度。由此得到不和谐性矩阵 $\boldsymbol{D}=(d_{ik})_{m\times m}$，$d_{ik}\in[0, 1]$ $(i, k=1,2,\cdots, m; i\neq k)$。$d_{ik}$ 越大，表示方案 $A_i \prec A_k$ 程度越大。

2.2 优先关系矩阵与总优势矩阵的计算

计算优先关系矩阵[15] $\boldsymbol{A}=(a_{ik})_{m\times m}$，其中矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{C}$ 与 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{D})$ 的 Hadamard 乘积，即：

$$a_{ik}=c_{ij}(1-d_{ik}) \tag{9}$$

其中 $\boldsymbol{E}$ 表示一个 $m\times m$ 的元素都为 1 的矩阵，则 a_{ik} 越大，表示方案 $A_i \succ A_k$ 程度越大。

为了确定总优势矩阵[15]，取矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中每一列的最大值 a_k，即 $a_k=\max\{a_{ik} \mid i=1, 2,\cdots, m\}$，$k=1, 2,\cdots, m$。将 a_k 依据由小及大的顺序排列：$a'_1, a'_2,\cdots, a'_m$，阈值 $\bar{a}$ 设定为排序第二小的值 a'_2，即 $\bar{a}=a'_2$。定义总优势矩阵 $\boldsymbol{E}'=(e'_{ik})_{m\times m}$：

$$e_{ik}=\begin{cases}1, & a_{ik}\geqslant\bar{a}\\ 0, & a_{ik}<\bar{a}\end{cases} \tag{10}$$

在总优势矩阵 $\boldsymbol{E}'$ 中，$e'_{ik}=1$ 时表明方案 A_i 优于方案 A_k，此时我们消除方案 A_k 并记为 $A_i\rightarrow A_k$。

2.3 决策步骤

依据上述的定义与分析，基于级别高于关系的区间犹豫模糊决策方法的具体步骤如下：

Step 1：建立区间犹豫模糊决策矩阵 $\boldsymbol{H}=(h_{ij})_{m\times n}$。决策者给出属性的权重向量 $\boldsymbol{W}=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}$，相关的态度权重向量 $\boldsymbol{\omega}=(\omega_C, \omega_{C'}, \omega_{C''}, \omega_D, \omega_{D'}, \omega_{D''}, \omega_{J^{=}})$。根据定义 2 计算各方案在各属性下评价信息的得分，并依据公式(3) 计算 $s(h_{ij})\geqslant s(h_{kj})$ 的可能度，根据公式(4) 计算区间犹豫模糊元的相离度。

Step 2：根据定义 6 可得区间犹豫模糊强和谐集 $J_{C_{ik}}$，中等和谐集 $J_{C'_{ik}}$ 与弱和谐集 $J_{C''_{ik}}$，无差异集 $J_{ik}^{=}$，强不和谐集 $J_{D_{ik}}$，中等不和谐集 $J_{D'_{ik}}$ 及弱不和谐集 $J_{D''_{ik}}$。

Step 3：根据公式(7) 计算区间犹豫模糊和谐性指数 c_{ik}，构建和谐性矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ik})_{m\times m}$。

Step 4：根据公式(5) 计算各方案对关于每个属性的加权距离，根据公式(8) 计算区间犹豫模糊不和谐性指数 d_{ik}，构建不和谐性矩阵 $\boldsymbol{D}=(d_{ik})_{m\times m}$。

Step 5：根据公式(9) 计算优先关系矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ik})_{m\times m}$。

Step 6：根据公式(10) 可得总优势矩阵 $\boldsymbol{E}'=(e'_{ik})_{m\times m}$。

Step 7：依总优势矩阵对方案进行排序。

3 算例分析

下面算例来自文献[14]。

某个风险投资公司进行项目投资决策，现有五个企业$A_i(i=1,2,3,4,5)$可供选择，专家基于以下四种属性$z_j(j=1,2,3,4)$对供应商进行评估：z_1— 风险分析，z_2— 成长分析，z_3— 社会政治影响，z_4— 环境影响。专家给出的属性权重为$\boldsymbol{W}=(0.2,0.1,0.3,0.4)^{\mathrm{T}}$。专家对方案$A_i$在属性$z_j$下的评估值由区间犹豫模糊元$h_{ij}$表示。区间犹豫模糊决策矩阵$\boldsymbol{H}=(h_{ij})_{5\times4}$如表1所示。

表 1 区间犹豫模糊决策矩阵

Tab. 1 Interval-valued hesitant fuzzy decision matrix

	z_1	z_2	z_3	z_4
A_1	{[0.2,0.3]}	{[0.6,0.7],[0.7,0.8]}	{[0.1,0.2],[0.3,0.4]}	{[0.5,0.6]}
A_2	{[0.4,0.5],[0.6,0.7]}	{[0.7,0.8]}	{[0.3,0.4],[0.5,0.6]}	{[0.3,0.4],[0.4,0.5]}
A_3	{[0.4,0.5]}	{[0.5,0.6],[0.6,0.7]}	{[0.4,0.5]}	{[0.2,0.3],[0.3,0.5]}
A_4	{[0.7,0.8]}	{[0.3,0.4],[0.5,0.6]}	{[0.5,0.7]}	{[0.2,0.3],[0.4,0.5],[0.3,0.4]}
A_5	{[0.6,0.7]}	{[0.6,0.7],[0.8,0.9]}	{[0.3,0.4]}	{[0.4,0.5],[0.7,0.8]}

Step 1：决策者给出态度权重$\boldsymbol{\omega}=(\omega_C,\omega_{C'},\omega_{C''},\omega_D,\omega_{D'},\omega_{D''},\omega_{J^=})=(1,0.9,0.8,1,0.9,0.8,0.7)$。各方案在各属性下评价信息的得分如表2所示，区间犹豫模糊元的相离度如表3所示，计算$s(h_{ij})\geqslant s(h_{kj})$的可能度如表4所示。

表 2 区间犹豫模糊得分值

Tab. 2 Interval-valued hesitant fuzzy score values

	z_1	z_2	z_3	z_4
A_1	[0.2,0.3]	[0.65,0.75]	[0.2,0.3]	[0.5,0.6]
A_2	[0.5,0.6]	[0.7,0.8]	[0.4,0.5]	[0.35,0.45]
A_3	[0.4,0.5]	[0.55,0.65]	[0.4,0.5]	[0.25,0.4]
A_4	[0.7,0.8]	[0.4,0.5]	[0.5,0.7]	[0.3,0.4]
A_5	[0.6,0.7]	[0.7,0.8]	[0.3,0.4]	[0.55,0.65]

表 3 区间犹豫模糊相离度

Tab. 3 Interval-valued hesitant fuzzy deviation degrees

	z_1	z_2	z_3	z_4
A_1	0	0.05	0.1	0
A_2	0.1	0	0.1	0.05
A_3	0	0.05	0	0.079 1
A_4	0	0.1	0	0.081 6
A_5	0	0.1	0	0.15

表 4 $s(h_{ij})\geqslant s(h_{kj})$的可能度

Tab. 4 Possibility degrees for $s(h_{ij})\geqslant s(h_{kj})$

	$s(h_{11})$	$s(h_{21})$	$s(h_{31})$	$s(h_{41})$	$s(h_{51})$		$s(h_{12})$	$s(h_{22})$	$s(h_{32})$	$s(h_{42})$	$s(h_{52})$
$s(h_{11})$	—	0	0	0	0	$s(h_{12})$	—	0.25	1	1	0.25
$s(h_{21})$	1	—	1	0	0	$s(h_{22})$	0.75	—	1	1	0.5
$s(h_{31})$	1	0	—	0	0	$s(h_{32})$	0	0	—	1	0
$s(h_{41})$	1	1	1	—	1	$s(h_{42})$	0	0	0	—	0
$s(h_{51})$	1	1	1	0	—	$s(h_{52})$	0.75	0.5	1	1	—
	$s(h_{13})$	$s(h_{23})$	$s(h_{33})$	$s(h_{43})$	$s(h_{53})$		$s(h_{14})$	$s(h_{24})$	$s(h_{34})$	$s(h_{44})$	$s(h_{54})$
$s(h_{13})$	—	0	0	0	0	$s(h_{14})$	—	1	1	1	0.25
$s(h_{23})$	1	—	0.5	0	1	$s(h_{24})$	0	—	0.8	0.75	0
$s(h_{33})$	1	0.5	—	0	1	$s(h_{34})$	0	0.2	—	0.4	0
$s(h_{43})$	1	1	1	—	1	$s(h_{44})$	0	0.25	0.6	—	0
$s(h_{53})$	1	0	0	0	—	$s(h_{54})$	0.75	1	1	1	—

Step 2：根据定义7建立区间犹豫模糊强和谐集$J_{C_{ik}}$，中等和谐集$J_{C'_{ik}}$与弱和谐集$J_{C''_{ik}}$，无差异集$J^{=}_{ik}$，强不和谐集$J_{D_{ik}}$，中等不和谐集$J_{D'_{ik}}$及弱不和谐集$J_{D''_{ik}}$，其中"—"表示不存在任何属性z_j使得方案A_i与A_k满足集合$J_{C_{ik}}$，$J_{C'_{ik}}$，$J_{C''_{ik}}$，$J^{=}_{ik}$，$J_{D_{ik}}$，$J_{D'_{ik}}$或者$J_{D''_{ik}}$的条件。

$$(J_{C_{ik}})_{5\times5}=\begin{bmatrix} — & 4 & 4 & 2,4 & — \\ 2 & — & 2,4 & 2,4 & — \\ 3 & — & — & 2 & — \\ 3 & 1,3 & — & — & — \\ 3 & 1 & — & — & — \end{bmatrix}$$

$$(J_{C'_{ik}})_{5\times5}=\begin{bmatrix} - & - & 2 & - & - \\ 1,3 & - & 1 & - & 3 \\ 1 & - & - & 1 & 3 \\ 1 & - & 1,3,4 & - & 1,3 \\ 1,2,4 & 4 & 1,2,4 & 2,4 & - \end{bmatrix}$$

$$(J_{C''_{ik}})_{5\times5}=\begin{bmatrix} - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & 2 \\ - & 3 & - & - & - \\ - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - \end{bmatrix}$$

$$(J_{D_{ik}})_{5\times5}=\begin{bmatrix} - & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & - & - & 1,3 & 1 \\ 4 & 2,4 & - & - & - \\ 2,4 & 2,4 & 2 & - & - \\ - & - & - & - & - \end{bmatrix}$$

$$(J_{D'_{ik}})_{5\times5}=\begin{bmatrix} - & 1,3 & 1 & 1 & 1,2,4 \\ - & - & - & - & 4 \\ 2 & 1 & - & 1,3,4 & 1,2,4 \\ - & - & 1 & - & 2,4 \\ - & 3 & 3 & 1,3 & - \end{bmatrix}$$

$$(J_{D''_{ik}})_{5\times5}=\begin{bmatrix} - & - & - & - & - \\ - & - & 3 & - & - \\ - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - \\ - & 2 & - & - & - \end{bmatrix}$$

$$(J_{ik}^{=})_{5\times5}=\begin{bmatrix} - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - \end{bmatrix}$$

Step 3：根据公式(7)计算区间犹豫模糊和谐性指数 c_{ik}，构建和谐性矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ik})_{5\times5}$：

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} - & 0.4 & 0.49 & 0.5 & 0 \\ 0.55 & - & 0.68 & 0.5 & 0.35 \\ 0.48 & 0.24 & - & 0.29 & 0.27 \\ 0.48 & 0.5 & 0.72 & - & 0.45 \\ 0.93 & 0.56 & 0.63 & 0.45 & - \end{bmatrix}$$

Step 4：利用公式(5)计算方案对关于每一个属性的加权汉明距离如表5所示，并用公式(8)计算区间犹豫模糊不和谐性指数 d_{ik}，构建不和谐性矩阵 $\boldsymbol{D}=(d_{ik})_{5\times5}$。

表5 加权汉明距离

Tab. 5 Weighted for Hamming distances

	h_{11}	h_{21}	h_{31}	h_{41}	h_{51}		h_{12}	h_{22}	h_{32}	h_{42}	h_{52}
h_{11}	—	0.066 7	0.040 0	0.100 0	0.080 0	h_{12}	—	0.003 3	0.010 0	0.030 8	0.006 7
h_{21}	—	—	0.026 7	0.033 3	0.013 3	h_{22}	—	—	0.013 3	0.034 2	0.010 0
h_{31}	—	—	—	0.060 0	0.040 0	h_{32}	—	—	—	0.020 8	0.016 7
h_{41}	—	—	—	—	0.020 0	h_{42}	—	—	—	—	0.037 5
h_{51}	—	—	—	—	—	h_{52}	—	—	—	—	—
	h_{13}	h_{23}	h_{33}	h_{43}	h_{53}		h_{14}	h_{24}	h_{34}	h_{44}	h_{54}
h_{13}	—	0.062 5	0.050 0	0.095 0	0.020 0	h_{14}	—	0.053 3	0.080 0	0.080 0	0.066 7
h_{23}	—	—	0.042 5	0.057 5	0.042 5	h_{24}	—	—	0.026 7	0.026 7	0.093 3
h_{33}	—	—	—	0.045 0	0.030 0	h_{34}	—	—	—	0.013 3	0.120 0
h_{43}	—	—	—	—	0.075 0	h_{44}	—	—	—	—	0.120 0
h_{53}	—	—	—	—	—	h_{54}	—	—	—	—	—

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} - & 0.9000 & 0.6250 & 0.9500 & 0.9000 \\ 0.7991 & - & 0.8000 & 1.0000 & 0.9000 \\ 1.0000 & 0.6282 & - & 0.9000 & 0.9000 \\ 0.8000 & 0.5948 & 0.9000 & - & 0.9000 \\ 0 & 0.4100 & 0.2250 & 0.5625 & - \end{bmatrix}$$

Step 5：根据公式(9)可得优先关系矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ik})_{5\times5}$：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} - & 0.0400 & 0.1833 & 0.0250 & 0 \\ 0.1105 & - & 0.1360 & 0 & 0.0350 \\ 0 & 0.0892 & - & 0.0290 & 0.0270 \\ 0.0960 & 0.2026 & 0.0720 & - & 0.0450 \\ 0.9300 & 0.3304 & 0.4883 & 0.1969 & - \end{bmatrix}$$

Step 6：根据公式(10)可得总优势矩阵 $\boldsymbol{E}' = (e'_{ik})_{5\times5}$：

$$\boldsymbol{E}' = \begin{bmatrix} - & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & - & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & - & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & - & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & - \end{bmatrix}$$

Step 7：依据总优势矩阵有：

$A_5 \to A_1$，$A_5 \to A_2$，$A_5 \to A_3$，$A_5 \to A_4$，$A_4 \to A_1$，$A_4 \to A_2$，$A_4 \to A_3$，$A_2 \to A_1$，$A_2 \to A_3$，$A_1 \to A_3$，方案的优先关系如图1所示，由此可得备选方案的排序为：$A_5 \succ A_4 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_3$。因此最优方案为 A_5。

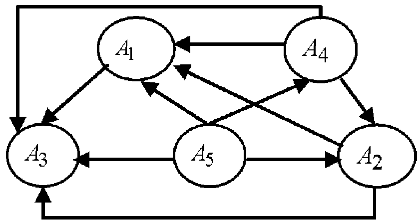

图 1 方案间的优先关系图

Fig. 1 Precedence relation between alternatives

若采用区间犹豫模糊元的欧氏距离可得不和谐性矩阵 $\boldsymbol{D} = (d_{ik})_{5\times5}$。

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} - & 0.9000 & 0.6644 & 1.0000 & 0.9000 \\ 0.8167 & - & 0.8000 & 1.0000 & 0.9000 \\ 1.0000 & 0.6424 & - & 0.9000 & 0.9000 \\ 0.8623 & 0.5213 & 0.9000 & - & 0.9000 \\ 0 & 0.4674 & 0.2170 & 0.5535 & - \end{bmatrix}$$

进而计算优先关系矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ik})_{5\times5}$ 和总优势矩阵 $\boldsymbol{E}' = (e'_{ik})_{5\times5}$。

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} - & 0.0400 & 0.1644 & 0 & 0 \\ 0.1008 & - & 0.1360 & 0 & 0.0350 \\ 0 & 0.0858 & - & 0.0290 & 0.0270 \\ 0.0661 & 0.2394 & 0.0720 & - & 0.0450 \\ 0.9300 & 0.2983 & 0.4933 & 0.2009 & - \end{bmatrix}, \boldsymbol{E}' = \begin{bmatrix} - & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & - & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & - & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & - & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & - \end{bmatrix}$$

因为有 $A_5 \to A_1$，$A_5 \to A_2$，$A_5 \to A_3$，$A_5 \to A_4$，$A_4 \to A_1$，$A_4 \to A_2$，$A_4 \to A_3$，$A_2 \to A_1$，$A_2 \to A_3$，$A_1 \to A_3$，由此可得备选方案的排序为 $A_5 \succ A_4 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_3$，最优方案为 A_5。与采用区间犹豫模糊元的汉明距离得到的方案排序相同。从表6中可以看出 IVHF ELECTRE 方法[14] 与本文的 OR-IVHFS 方法所得最优方案相同，但 IVHF ELECTRE 方法不能区分 A_1 与 A_3 的优劣，而本文的 OR-IVHFS 方法则可以区分 A_1 与 A_3 的优劣。

表 6 方案的排序

Tab. 6 Ordering of the alternative

方法	方案排序
IVHF ELECTRE	$A_5 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_1 \sim A_3$
OR-IVHFS（汉明距离）	$A_5 \succ A_4 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_3$
OR-IVHFS（欧氏距离）	$A_5 \succ A_4 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_3$

4 结 论

本文提出了一种基于级别高于关系的区间犹豫模糊多属性决策方法，将决策信息为犹豫模糊集的多属性决策问题扩展到决策信息为区间犹豫模糊集的情形。利用可能度与相离度的概念定义了区间犹豫模糊和谐集与不和谐集及其相应的指数，并通过改进的 ELECTRE 方法实现备选方案的排序。所提出的方法保留了 ELECTRE 方法的优点，且得到各方案的整体排序的步骤简洁、科学，便于决策者掌握。将所提出的方法应用于文献[14]的项目投资案例中，表明了所提出方法的可行性与有效性。

参考文献：

[1] QIN Jindong, LIU Xinwang, PEDRYCZ W. Frank aggregation operators and their application to hesitant fuzzy multiple attribute decision making[J]. Applied Soft Computing, 2016, 41: 428-452.

[2] JIN Feifei, NI Zhiwei, CHEN Huayou. Note on "Hesitant fuzzy prioritized operators and their application to multiple attribute decision making"[J]. Knowledge-Based Systems, 2016, 96: 115-119.

[3] SUN Pengbo, LIU Yutian, QIU Xizhao, et al. Hybrid multiple attribute group decision-making for power system restoration[J]. Expert Systems with Applications, 2015, 42(19): 6795-6805.

[4] ZADEH L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338-353.

[5] TORRA V, NARUKAWA Y. On hesitant fuzzy sets and decision[C]//2009 IEEE International Conference on Fuzzy Systems, Jeju Island, 2009, 1378-1382.

[6] CHEN Na, XU Zeshui, XIA Meimei. Interval-valued hesitant preference relations and their applications to group decision making[J]. Knowledge-Based Systems, 2013, 37: 528-540.

[7] DOUMPOS M, MARINAKIS Y, MARINAKI M, et al. An evolutionary approach to construction of outranking models for multicriteria classification: The case of the ELECTRE TRI method[J]. European Journal of Operational Research, 2009, 199(2): 496-505.

[8] SHEN Feng, XU Jiuping, XU Zeshui. An outranking sorting method for multi-criteria group decision making using intuitionistic fuzzy sets[J]. Information Sciences, 2016, 334-335: 338-353.

[9] WANG Jianqiang, WANG Jing, CHEN Qinghui, et al. An outranking approach for multi-criteria decision making with hesitant fuzzy linguistic term sets[J]. Information Sciences, 2014, 280: 338-351.

[10] El-ZEIN A, TONMOY F N. Assessment of vulnerability to climate change using a multi-criteria outranking approach with application to heat stress in Sydney[J]. Ecological Indicators, 2015, 48: 207-217.

[11] KABAK M, BURMAOGLU S, KAZANCOGLU Y. A fuzzy hybrid MCDM approach for professional selection[J]. Expert Systems with Applications, 2012, 39(3): 3516-3525.

[12] ZANDI A, ROGHANIAN E. Extension of Fuzzy ELECTRE based on VIKOR method[J]. Computers & Industrial Engineering, 2013, 66(2): 258-263.

[13] ZAK J, KRUSZYNSKI M. Application of AHP and ELECTRE III/IV methods to multiple level, multiple criteria evaluation of urban transportation projects[J]. Transportation Research Procedia, 2015, 10: 820-830.

[14] 于倩,侯福均,翟玉冰,等. 区间犹豫模糊ELECTRE多属性决策方法及应用[J]. 运筹与管理,2015,24(6):16-24.
YU Qian, HOU Fujun, ZHAI Yubing, et al. ELECTRE-based measure for multi-attribute decision making using interval-valued hesitant fuzzy set[J]. Operations Research and Management Science, 2015, 24(6): 16-24.

[15] KE C K, CHEN Y L. A message negotiation approach to e-services by utility function and multi-criteria decision analysis[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2012, 64(5): 1056-1064.

[16] CHEN Na, XU Zeshui. Hesitant fuzzy ELECTRE Ⅱ approach: A new way to handle multi-criteria decision making problems[J]. Information Sciences, 2015, 292: 175-197.

(责任编辑 王绪迪)