

DOI:10.19322/j.cnki.issn.1006-4710.2017.01.007

无网格动力法中质量矩阵构造方法研究

司建辉, 郭 瑶

(西安理工大学 土木建筑工程学院, 陕西 西安 710048)

摘要: 无网格动力法中质量矩阵的构造对计算结果的精度有着重要影响。本文就无网格动力法中质量矩阵的构造方法, 给出了一致质量矩阵和集中质量矩阵的数学表达式, 运用 MATLAB 软件编制了基于不同质量矩阵的无网格动力法计算程序, 对无约束矩形板不同质量矩阵构造下的频率和振型进行了对比计算。结果表明: 采用集中质量矩阵时, 结果受节点划分的影响较大, 只有节点划分足够密集时, 结果才趋于精确值; 而采用一致质量矩阵时, 结果受节点划分的影响较小, 说明了一致质量矩阵在无网格动力法质量矩阵构造中的优越性。

关键词: 无网格法; 一致质量矩阵; 集中质量矩阵; 质量矩阵构造; MATLAB

中图分类号: TU312 **文献标志码:** A **文章编号:** 1006-4710(2017)01-0036-05

Study of the method for construction of mass matrix in meshless dynamic method

SI Jianhui, GUO Yao

(School of Civil Engineering and Architecture, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China)

Abstract: The structure of the mass matrix in the meshless dynamic method has important influence on the accuracy of the calculation results. This paper presents the method for construction of mass matrix in the meshless dynamic method. The MATLAB software is used to compile the meshless dynamic calculation program based on the different mass matrix. The frequency and mode of the structure of the different mass matrices of the unconstrained rectangular plate are calculated and compared. The results show that the lumped mass matrix and the affected node partition is large, and that only when the node is dense enough, the result tends to the exact value; the consistent mass matrix being adopted, the affected node partition is small, showing the superiority of the consistent mass matrix in grid power quality in matrix structure.

Key words: meshless method; consistent mass matrix; lumped mass matrix; mass matrix structure; MATLAB

无网格法^[1-2]是一种新型数值计算方法, 它只需要节点信息, 可以完全或部分抛开网格, 在结构大变形及自适应计算等方面较有限单元法具有较大的优势。近年来, 许多学者都致力于无网格动力法的研究, 李卧东等^[3]采用移动最小二乘法构造位移函数, 采用罚函数法满足本征边界条件, 对弹性体的振动问题进行了无网格法分析; 程玉民等^[4]将改进的移动最小二乘法与弹性动力学的边界积分方程相结合, 提出了弹性动力

学的边界无单元法; 胡可等^[5]对有限单元法中一致质量矩阵进行了分析和计算, 给出了一致质量矩阵的应用公式; 苗雨等^[6]提出了求解弹性动力学问题的双互易杂交边界点法; 陈莘莘等^[7]提出了动力弹塑性分析的无网格自然单元法; 李树枕等^[8]提出了弹性动力学的无网格流形方法; 左占宣等^[9]建立了基于力的变截面梁单元质量矩阵的新方法, 得到了考虑剪切变形的位移插值函数和考虑转动惯量的一致质量矩阵; 姚涛等^[10]提

收稿日期: 2016-03-12

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51308455); 陕西省教育厅自然科学专项基金资助项目(15JK1522); 西安市建设科技计划资助项目(SJW2015-21); 西安理工大学科技创新计划资助项目(2015CX019)

作者简介: 司建辉, 男, 副教授, 博士, 研究方向为结构设计与优化。E-mail: sjhfr@163.com

出了基于集中质量法的普通圆锯片的振动响应分析。综上所述,无网格动力法中质量矩阵有一致质量矩阵和集中质量矩阵两种构造形式,本文将分别采用一致质量矩阵和集中质量矩阵两种方法构造动力方程,通过布置不同的节点密度来探讨两种质量矩阵计算结果的差异。

1 无网格法动力方程

运用哈密顿原理导出的线性系统动力方程为^[11]:

$$M\ddot{u}(t) + C\dot{u}(t) + Ku(t) = F(t) \quad (1)$$

式中, M 为质量矩阵, K 为刚度矩阵, C 为阻尼矩阵, $F(t)$ 为荷载列阵, $\ddot{u}(t)$ 为 t 时刻节点的加速度列阵, $\dot{u}(t)$ 为 t 时刻节点的速度列阵, $u(t)$ 为 t 时刻节点的位移列阵。其中:

$$K = \int_{\Omega} B^T DB d\Omega \quad (2)$$

$$B = \begin{bmatrix} \varphi_{1x} & 0 & \varphi_{2x} & 0 & \cdots & \varphi_{nx} & 0 \\ 0 & \varphi_{1y} & 0 & \varphi_{2y} & \cdots & 0 & \varphi_{ny} \\ \varphi_{1y} & \varphi_{1x} & \varphi_{2y} & \varphi_{2x} & \cdots & \varphi_{ny} & \varphi_{nx} \end{bmatrix}$$

$$D = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix}$$

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 & \varphi_2 & 0 & \cdots & \varphi_n & 0 \\ 0 & \varphi_1 & 0 & \varphi_2 & \cdots & 0 & \varphi_n \end{bmatrix}$$

式中: B 为应变矩阵, D 为弹性矩阵, Ω 为积分域, φ 为形函数, φ_{nx} 、 φ_{ny} 分别为第 n 个节点 x 方向和 y 方向的形函数, φ_n 为第 n 个节点的形函数, E 为弹性模量, μ 为泊松比。

$$C = \alpha M + \beta K \quad (3)$$

其中,阻尼矩阵 C 取质量矩阵与刚度矩阵的线性组

$$M = \begin{bmatrix} M_{1x} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{1y} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{2x} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{2y} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & M_{(n-1)x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & M_{(n-1)y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & M_{nx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & M_{ny} \end{bmatrix}_{2n \times 2n} \quad (6)$$

式中, M_{nx} 、 M_{ny} 分别为第 n 个节点 x 、 y 方向上的质量。

由公式(6)可以看出,集中质量矩阵的元素主要集中于主对角线上,而主对角线上的元素总和即为

合, α 与 β 分别为质量矩阵因子和刚度矩阵因子,可根据具体问题的振型阻尼比来取值。

当采用一致质量矩阵构造质量矩阵 M 时,对位移采用形函数 φ 进行计算:

$$M = \int_{\Omega} \rho \varphi^T \varphi d\Omega \quad (4)$$

式中, ρ 为密度。

2 构造集中质量矩阵

集中质量模型是从物理参数分布很不均匀或相对集中的实际系统中抽象出来的,主要应用于均匀或近乎均匀的弹性体上。它通过把那些惯性相对大而弹性极微弱的部件看作集中质量,而把那些惯性相对小而弹性极为显著的部件看作无质量的弹簧,将结构划分为若干个单元,再按力学平行分解原理,将单元的分布质量集中于单元的两个端点,这样,便把一个具有无限自由度的结构离散为一个有限自由度系统。其中,集中质量间的连接刚度仍与原结构相同。

对于集中质量矩阵的构造可以借鉴有限单元法,将高斯点影响域内节点的质量集中于高斯点之上,然后通过每个节点的高斯点质量来建立集中质量矩阵。

结构整体质量 $M = \rho \cdot V$,设分布的节点有 n 个,考虑具体的节点,都有 M_x 、 M_y 两个方向的质量。采用有限单元法的计算公式对集中质量矩阵进行计算:

$$(M_i)_{i,j} = \frac{\int_{\Omega} \rho d\Omega}{\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \rho N_i^2 d\Omega} \int_{\Omega} N_i^2 d\Omega \quad (5)$$

式中, $(M_i)_{i,j}$ 为单元质量矩阵, N_i 为有限单元法中第 i 个节点的形函数, i,j 表示节点编号。

对质量进行分配,建立集中质量矩阵为:

结构的整体质量。在结构动力计算时,由于集中质量矩阵只有主对角线上有数值,相对于一致质量矩阵,在同一节点上的动力自由度减少了一半,从而使计算质量矩阵的时间缩短。

3 计算流程

无网格动力法对结构的模态分析主要包括计算结构的自振频率和振型,其计算流程为:

- 1) 根据构件形状生成节点,并计算节点影响半径;
- 2) 存储各网格所包含的节点号;
- 3) 确定高斯点的位置及积分权重;
- 4) 高斯点上逐个计算形函数;
- 5) 搜寻高斯点的影响节点;
- 6) 建立构件的刚度矩阵;
- 7) 建立构件的一致质量矩阵或集中质量矩阵;
- 8) 求解控制方程,得到构件的自振频率和振型。

根据上述计算流程,应用 MATLAB 软件编制了相应的计算程序。

4 数值算例

为了比较一致质量矩阵与集中质量矩阵对计算结果精度的影响,本文就以无约束矩形板为例,对不同节点划分条件下的各阶频率进行了分析比较。

算例:一无约束矩形板,长 $a=10\text{m}$,宽 $b=8\text{m}$,厚度为单位厚度 1,弹性模量 $E=2\times 10^6\text{ Pa}$,泊松比 $\mu=0.167$,密度 $\rho=2.4\times 10^3\text{ kg/m}^3$ 。

影响无网格动力法计算结构频率和振型精度的主要因素是结构中节点的布置密度,因此,为了区别集中质量矩阵与一致质量矩阵对计算结果的影响,分别按照 6×5 、 11×9 、 21×17 、 31×25 、 41×33 五种方式对无约束矩形板结构的节点进行划分,求解该结构的频率及振型,并进行对比分析。采用集中质量矩阵计算的结果如表 1 所示,采用一致质量矩阵计算的结果如表 2 所示。

表 1 集中质量矩阵计算结果
Tab. 1 Calculation results of lumped mass matrix

节点划分	频率									
	1 阶	2 阶	3 阶	4 阶	5 阶	6 阶	7 阶	8 阶	9 阶	10 阶
6×5	0.00	0.00	0.00	26.77	37.11	38.23	41.70	44.13	49.22	49.85
11×9	0.00	0.00	0.00	31.26	40.29	42.60	43.75	47.33	55.59	57.45
21×17	0.00	0.00	0.00	33.88	41.17	43.97	46.42	49.99	57.66	62.07
31×25	0.00	0.00	0.00	34.69	41.36	44.18	47.66	50.76	58.01	63.71
41×33	0.00	0.00	0.00	35.03	41.44	44.31	48.24	51.06	58.14	64.27

表 2 一致质量矩阵计算结果
Tab. 2 Calculation results of consistent mass matrix

节点划分	频率									
	1 阶	2 阶	3 阶	4 阶	5 阶	6 阶	7 阶	8 阶	9 阶	10 阶
6×5	0.00	0.00	0.00	35.95	41.83	44.78	49.79	52.03	58.63	65.42
11×9	0.00	0.00	0.00	35.85	41.71	44.76	49.65	51.95	58.54	65.09
21×17	0.00	0.00	0.00	35.84	41.70	44.76	49.64	51.95	58.54	65.07
31×25	0.00	0.00	0.00	35.84	41.70	44.76	49.64	51.95	58.54	65.07
41×33	0.00	0.00	0.00	35.84	41.70	44.76	49.64	51.95	58.54	65.07

由表 1 和表 2 可知,不同节点密度对于采用一致质量矩阵的计算结果影响不大,但对集中质量矩阵的计算结果影响较大。比较不同节点密度下两种质量矩阵计算结果可知,采用集中质量矩阵时,只有加大节点密度才能保证计算结果的可靠性,而增大节点密度必然会导致计算时间的大幅增加;采用一

致质量矩阵时,在较小的节点密度就可以达到较好的精度。由此可见,在无网格动力法计算中,质量矩阵的构造采用一致质量矩阵是合理的,只需布置合理的节点密度,即可得到较精确的结果,既能保证计算精度,又可节约计算时间。图 1 为一致质量矩阵与集中质量矩阵不同节点分布下的部分第 4 阶振型图。

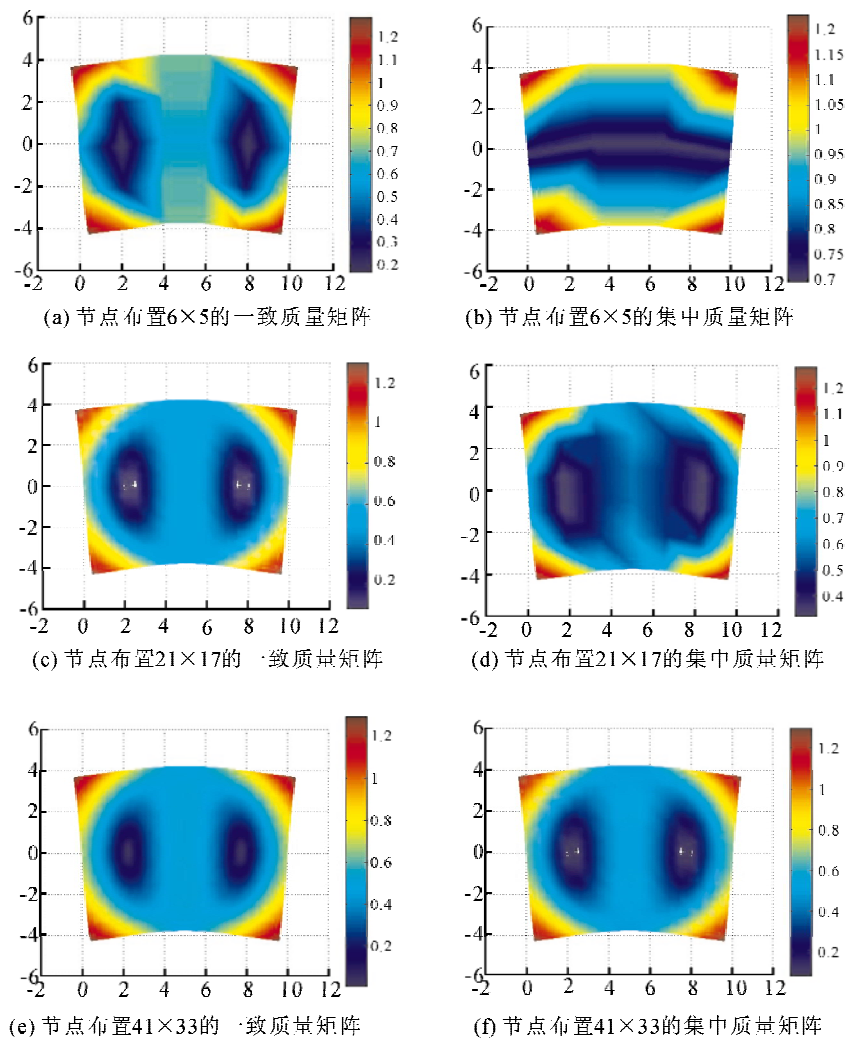


图1 不同质量矩阵构造下的振型图

Fig. 1 Vibration mode in diagram of different mass matrix structures

从图1(a)、(b)可以看出,在节点布置为 6×5 时,一致质量矩阵与集中质量矩阵振型图的位移变化差别较大;从图1(c)、(d)可以看出,在节点布置为 21×17 时,其位移变化差别也较大。比较图1(a)、(c)、(e)可以看出,采用一致质量矩阵,在不同节点布置条件下,振型图的位移变化差别均较小。说明用一致质量矩阵在较低的节点密度就可达到较好的精度,而集中质量矩阵只有在节点分布足够密集时,才可达到较好的精度。

5 结论

1) 当质量矩阵构造采用集中质量矩阵时,结果受节点划分密度的影响较大,不同节点划分下的频率和振型差异均很大,只有当节点划分足够密集时,才能保持较好的精度。

2) 当质量矩阵构造采用一致质量矩阵时,结果受节点划分密度的影响较小,不同节点划分下的频

率和振型差异均很小,而且它在较低的节点密度下,也能保持较好的精度。

3) 集中质量矩阵相对于一致质量矩阵需要布置更多的节点才能保持良好的计算精度,而布置节点的增加,将导致计算时间的延长。所以运用一致质量矩阵可以节约计算时间。

4) 当运用无网格动力法来求解结构自由振动的动力特性时,质量矩阵的构造运用一致质量矩阵可以保持良好的精度。

参考文献:

- [1] BELYTSCHKO T. Mesh-less methods, An overview and recent developments [J]. Computer Methods Applied Mechanics Engineering, 1996, 139(2): 3-47.
- [2] LI Shaofan, LIU W. Meshfree and particle method and their applications [J]. Applied Mechanics Review, 2002, 55(1): 1-34.
- [3] 李卧东,王元汉,谭国焕. 无网格法在弹塑性问题中的应

- 用[J]. 固体力学学报, 2001, 22(4): 361-367.
LI Wodong, WANG Yuanhan, TAN Guohuan. Application of meshless method to elastoplastic problems[J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 2001, 22(4): 361-367.
- [4] 程玉民, 陈美娟. 弹性力学的一种边界无单元法[J]. 力学学报, 2003, 35(2): 181-186.
CHENG Yumin, CHEN Meijuan. A boundary-free method for linear elasticity[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2003, 35(2): 181-186.
- [5] 胡可. 基于有限元方法一致质量矩阵的分析与计算[J]. 煤炭技术, 2012, 31(1): 170-172.
HU Ke. Analysis and calculation of consistent mass matrix based on finite element method[J]. Coal Technology, 2012, 31(1): 170-172.
- [6] 苗雨, 王元汉. 弹性动力学的双互易杂交边界点法[J]. 力学学报, 2009, 41(1): 122-128.
MIAO Yu, WANG Yuanhan. Dual reciprocity hybrid boundary node method for elastodynamics [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2009, 41(1): 122-128.
- [7] 陈莘莘, 李庆华, 刘应华, 等. 动力弹塑性分析的无网格自然单元法[J]. 固体力学学报, 2011, 32(5): 493-499.
CHEN Shenshen, LI Qinghua, LIU Yinghua, et al. Application of meshless natural element method to dynamic elastoplastic analysis [J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 2011, 32(5): 493-499.
- [8] 李树枕, 李术才, 朱维申. 弹性动力学的无网格流形方法[J]. 岩土力学与工程学报, 2006, 25(1): 141-145.
LI Shuzhen, LI Shucan, ZHU Weishen. Study on meshless manifold method in elastodynamics [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2006, 25(1): 141-145.
- [9] 左占宣, 李爽, 翟长海. 建立基于力的变截面梁单元质量矩阵的新方法[J]. 计算力学学报, 2013, 30(5): 744-748.
ZUO Zhanxuan, LI Shuang, ZHAI Changhai. A new method of formulating the consistent mass matrices for force-based beam elements [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2013, 30(5): 744-748.
- [10] 姚涛, 段国林, 张家湾, 等. 基于集中质量法的普通圆锯片及开槽圆锯片振动响应分析[J]. 应用力学学报, 2015, 32(3): 496-501.
YAO Tao, DUAN Guolin, ZHANG Jia, et al. Application of concentrated mass method to vibration response analysis for slotted circular saw blade [J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2015, 32(3): 496-501.
- [11] 刘晶波, 杜修力. 结构动力学[M]. 北京: 机械工业出版社, 2005: 17-20.
(责任编辑 周 蓓)

(上接第 28 页)

- [11] BASU P, PREZZI M, SALGADO R, et al. Shaft resistance and setup factors for piles jacked in clay [J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2013, 08 (online).
- [12] BURLAND J P. Shaft friction of piles in clay—a simple fundamental approach [J]. Ground Engineering, 1973, 6: 30-42.
- [13] RANDOLPH M F. Science and empiricism in pile foundation design [J]. Geotechnique, 2003, 53: 847-875.
- [14] 唐世栋. 用有效应力原理分析桩基承载力的变化全过程[D]. 上海: 同济大学, 1990.
TANG Shidong. The whole variation of piles bearing capacity using effective stresses [D]. Shanghai: Tongji University, 1990.
- [15] 姚笑青, 胡中雄. 饱和软土中沉桩引起的孔隙水压力估算[J]. 岩土力学, 1997, 18(4): 30-35.
YAO Xiaoqing, HU Zhongxiong. Estimating method for excess pore-water pressure developed during pile driving [J]. Rock and Soil Mechanics, 1997, 18(4): 30-35.
- [16] 陈文. 饱和粘土中静压桩沉桩机理及挤土效应研究—空间理论分析与离心模拟试验 [D]. 南京: 河海大学, 1999.
CHEN Wen. Pile jacked in saturated clay—mechanism of penetration and soil compaction effect [D]. Nanjing: Hohai University, 1999.
(责任编辑 杨小丽)