

DOI:10.19322/j.cnki.issn.1006-4710.2017.01.015

复杂网络系统的拓扑结构辨识方法

周仁^{1,2}, 任海鹏^{1,2}

(1. 西安理工大学 自动化与信息工程学院, 陕西 西安 710048;

2. 陕西省复杂系统控制与智能信息处理重点实验室, 陕西 西安 710048)

摘要: 网络拓扑是复杂网络分析、预测和控制的必要条件, 本文针对复杂网络拓扑辨识方法的研究, 首先对复杂网络拓扑辨识问题进行了描述, 然后对近年提出的基于同步方法、基于压缩感知理论方法等拓扑辨识方法进行了全面回顾, 讨论了网络拓扑辨识的步骤。在此基础上, 总结分析了已有方法存在的问题, 对复杂网络拓扑辨识未来的研究方向进行了讨论。

关键词: 复杂网络; 拓扑辨识; 同步; 压缩感知

中图分类号: O157.5

文献标志码: A

文章编号: 1006-4710(2017)01-0080-06

A review for topology identification of complex networks

ZHOU Ren^{1,2}, REN Haipeng^{1,2}

(1. School of Automation and Information Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China;
2. Shaanxi Key Laboratory for Complex System Control and Intelligent Information Processing, Xi'an 710048, China)

Abstract: The network topology is a necessary condition for complex network analysis, forecast and control. In this paper, the complex network topology identification problem is described for the research of complex network topology identification method. Then, the recently reported researches on the topology identification are reviewed comprehensively, and the steps of network topology identification are discussed. On this basis, the problems existing in the existing methods are analyzed, and the future research directions on complex network topology identification are pointed out.

Key words: complex networks; topology identification; synchronization; compressive sensing

由交通网络到朋友圈, 人们日常生活各种网络中。网络是由节点和他们之间的相互联系构成的, 节点多互联关系复杂的网络称为复杂网络。复杂网络研究初期的内容为网络的形成机制、控制等^[1-2]。这些研究基于网络结构已知, 然而, 在实际中网络大多含有未知的拓扑结构和节点动力学。例如, 基因调控网络, 节点之间的调控关系非常复杂^[3], 但了解节点之间的调控(拓扑)关系, 对疾病的治疗具有重要意义。因此, 利用观测到的节点信息辨识网络的拓扑结构具有重要的理论意义和应用价值。

如果网络的先验信息较少, 网络拓扑辨识问题的求解比较困难, 现有的方法大都对求解问题的前提进行了假设, 使问题变得简化, 方便处理。例如基于同步的方法是常用的拓扑辨识方法, 使用该方法的

条件是: ①已知节点固有的动力学方程 f_i ; ②已知节点间的耦合函数 $h(\cdot)$; ③已知节点状态的时间序列 $\{x_i(t)\}$; ④函数 f_i 和函数 $h(\cdot)$ 满足利普希茨条件; ⑤时间序列 $h[x_i(t)]$ 完全线性独立; ⑥观测时间序列 $\{x_i(t)\}$ 足够长。在如此多的辨识前提下, 可以得到比较理想的结果。如果假设条件不能满足, 方法应用就会受到限制。

本文首先对复杂网络拓扑辨识问题进行了简单描述, 然后对近年提出的相关方法进行了全面回顾, 具体包括: 基于同步方法、基于优化思想方法、基于压缩感知理论方法、基于噪声诱导方法以及基于互信息理论方法, 讨论了复杂网络拓扑辨识的步骤, 分析了各类方法的特点。最后针对已有方法存在的问题, 对未来的研究方向进行了讨论。

收稿日期: 2016-03-28

基金项目: 陕西省重大基础研究资助项目(2016ZDJC-01); 陕西省重点科技创新团队资助项目(2013KCT-04)

作者简介: 周仁, 女, 硕士生, 研究方向为复杂网络辨识与控制。E-mail: 1102749565@qq.com

通讯作者: 任海鹏, 男, 博导, 教授, 博士, 研究方向为复杂系统分析与控制。E-mail: renhaipeng@xaut.edu.cn

1 网络拓扑辨识问题描述

用图论对复杂网络进行描述,则节点集合代表网络中各个单元,边集合代表各个单元之间的联系。考虑具有 N 个节点的网络如下式(1):

$$\dot{x}_i = f_i(x_i) + \sum_{j=1}^N a_{ij} h(x_j) \quad (1)$$

其中: $x_i = [x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}]^T \in R^n$ 为节点 i 的状态变量; $f_i: R^n \rightarrow R^n$ 为单个节点 i 的动态特性方程; $A = (a_{ij})$ 为网络连接矩阵,当节点 i 与节点 j 之间存在连接时 $a_{ij} \neq 0$, 否则等于 0; $h(\cdot)$ 为耦合函数。以图 1 所示的 4 节点混沌振荡网络为例,模型如(2)式。

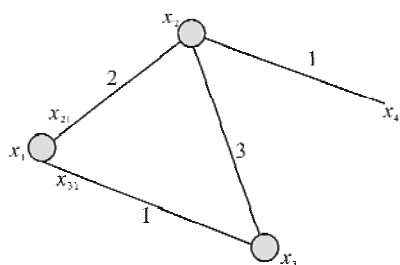


图 1 4 节点网络

Fig. 1 4-node network

$$\dot{x}_i = f_i(x_i) + \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma x_j \quad (2)$$

其中: $f_i(x_i) = \begin{bmatrix} 36(x_{i2} - x_{i1}) \\ -x_{i1}x_{i3} + 20x_{i2} \\ x_{i1}x_{i2} - 3x_{i3} \end{bmatrix}$, $h(x_j) = \Gamma x_j$ 表明

各节点之间进行线性耦合, $\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in R^{3 \times 3}$ 表

明各节点之间通过第一个状态进行耦合, $a_{12} = 2$ 表明节点 1 和节点 2 间的耦合强度为 2。复杂网络拓扑辨识的任务就是根据观测得到的节点状态信息 x_i 辨识连接矩阵 A 。

2 基于同步的网络拓扑辨识方法

为了辨识连接矩阵 A , 将式(1)作为驱动网络, 构造如式(3)的响应网络和自适应规律, 使得响应网络与驱动网络完全同步, 此时 $B = (b_{ij}) = A = (a_{ij})$, 从而实现辨识的目的。

$$\begin{aligned} \dot{y}_i &= f_i(y_i) + \sum_{j=1}^N b_{ij} h(y_j) + u_i \\ b_{ij} &= -\gamma_{ij} (y_i - x_i)^T h(y_i) \\ u_i &= -d_i (y_i - x_i), \\ \dot{d}_i &= k_i \|y_i - x_i\|^2 \end{aligned} \quad (3)$$

在引言中 6 个条件都满足的情况下, Yu Dongchuan^[4], Zhou Jin^[5] 等人构造响应网络, 通过状态误差构造控制规律和拓扑自适应规律来达到拓扑辨识的目的。Zhang Shuna^[6] 等人基于广义外同步构造由简单节点组成的响应网络, 使得辨识复杂度大大降低。万佑红^[7] 等人利用输出变量作为反馈信号, 降低了对于节点所有状态变量可测的条件。Li Suhong^[8], Marc Timme^[9] 等人基于相同步通过独立重复实验 N 次来辨识相位振子网络拓扑。Xu Junqun^[10] 等人考虑具有时滞和噪声的网络拓扑辨识问题。在条件①不满足的情况下, Lu Junan^[11] 等人构造响应网络来达到同时辨识系统参数和网络拓扑的目的。在条件③不满足的情况下, Yu Mao^[12], Zhou Jin^[13] 等人将各节点第一个状态传递给观测器, 需要可测的状态变量数目减少, 但需要存在一个满足复杂不等式条件的正定函数, 故适用范围受到限制。在条件⑤不满足的情况下, Chen Liang^[14] 等人分析了驱动网络的内同步对拓扑辨识的影响。Peng Haipeng^[15] 等人探究瞬态过程对网络拓扑辨识的影响。Yang Pu^[16] 等人将非同步状态下的数据进行存储反复使用多次, 得到了比较好的结果。在 6 个条件都满足的情况下, Liu Danfeng^[17] 等人引入脉冲控制策略, 实现网络拓扑辨识。在条件①不满足的情况下, Xu Junqun^[10], Yu Mao^[12] 等人引入牵制控制策略, 从而使得控制器个数减少。

3 基于优化思想的网络拓扑辨识方法

针对自适应同步方法存在内同步导致拓扑辨识失败的问题, 一些学者提出利用优化的思想解决拓扑辨识问题。该方法描述如下:

考虑如(1)所示的待辨识网络, 构造如下的响应网络模型:

$$\dot{y}_i = f(y_i) + \sum_{j=1}^N b_{ij} h(y_j) \quad (4)$$

通过状态误差构造目标函数, 将拓扑辨识问题转换成最小值优化问题, 利用优化算法进行搜索求解。

在条件③和⑤不满足的情况下, Tang Shengxue^[18] 等人利用量子粒子群算法求解, 当驱动网络发生内同步, 利用过渡时段的数据进行拓扑辨识; 部分状态变量可检测时, 利用可检测的状态构造目标函数, 均能实现辨识。He Tao^[19] 等人利用投影共轭梯度算法求解, 实现了对含有噪声、只有部分状态可测、拓扑时变等情况下的网络拓扑的成功辨识。在条件⑤不满足的情况下, Peng Haipeng^[20] 等人利用

混沌蚂蚁群算法求解, 搜索时间较长。Ke Tingting^[21]利用网络结构的稀疏性质, 提出一个带有正则化的最小二乘模型, 用加权迭代最小二乘算法进行优化求解。

4 基于压缩感知的网络拓扑辨识方法

网络的拓扑辨识过程可以通过数学推导转换成对方程求解稀疏向量的问题。具体思路如下:

考虑节点动力学特性未知, 网络模型如式(2)。假设第 i 个节点中含有 3 个状态 x_{i1}, x_{i2}, x_{i3} , 级数展开非线性项阶次最高为 3 阶, 则第 i 个节点的第一个变量可以进行如下近似:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{i1} &= f_{i1}(x_i) + \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma_j x_j \approx \\ &(s_i)_{000} x_{i1}^0 x_{i2}^0 x_{i3}^0 + \dots + (s_i)_{333} x_{i1}^3 x_{i2}^3 x_{i3}^3 + \\ &\sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma_j x_j = \Phi_{i1} \chi_{i1} \end{aligned} \quad (5)$$

χ_{i1} 由(5)式中各项系数组成, Φ_{i1} 由(5)式中各项状态变量组成。

对于 M 个观测数据, 则有:

$$Y_{i1} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{i1}(t_1) \\ \dot{x}_{i1}(t_2) \\ \vdots \\ \dot{x}_{i1}(t_M) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{i1}(t_1) \\ \Phi_{i1}(t_2) \\ \vdots \\ \Phi_{i1}(t_M) \end{bmatrix} \chi_{i1} = \Phi_{i1} \chi_{i1} \quad (6)$$

如果 χ_{i1} 是稀疏的, 则基于压缩感知理论利用较少的 M 次数据可以推断出包含在估计向量 χ_{i1} 中的网络拓扑。

在条件①和⑥不满足的情况下, Wang Wenxu^[22]等人对节点模型进行幂级数展开, 对节点输出值进行采样, 在此数据基础上通过求压缩感知稀疏解得到节点的连接向量。Su Riqi^[23]等人考虑耦合时滞作用, 将时滞项进行一阶泰勒近似, 节点模型进行幂级数展开, 对网络拓扑参数和时滞辨识成功。Li Guangjun^[24]等人对未知的节点模型进行泰勒展开, 对节点为含有三角函数的 Duffing 振子的网络进行了成功辨识。泰勒展开的阶次与观测数据有效的邻域半径有关。Su Riqi^[25]等人利用压缩感知理论对网络拓扑和节点动力学进行重构, 然后基于主稳定函数法进行网络同步能力分析。Su Riqi^[26]等人利用压缩感知理论对神经网络拓扑和节点动力学进行重构, 辨识出了网络中的混沌单元。Wang Wenxu^[27]等人分析离散的进化博弈数据, 对囚徒困境模型和雪堆模型进行网络拓扑辨识。

5 基于噪声诱导的网络拓扑辨识方法

Ren Jie^[28]等人发现, 在噪声的诱导作用下, 通

过计算出动力学相关性矩阵, 就能够辨识网络的连接状况。其具体思路如下:

考虑有噪声作用的网络如下式:

$$\dot{x}_i = f_i(x_i) - \delta \sum_{j=1}^N L_{ij} H(x_j) + \eta_i \quad (7)$$

其中 δ 为耦合强度, η_i 为噪声, $L = (L_{ij})_{N \times N}$ 为拉普拉斯矩阵: 当节点 i 与节点 j 之间存在连接时 $L_{ij} = -1$, 否则等于 0。考虑线性耦合, 协方差矩阵为 $\sigma^2 I$ 的高斯白噪声, 对(7)式在 \bar{x}_i 处线性化得到:

$$LC + CL^T = \sigma^2 I / \delta \quad (8)$$

动力学相关性矩阵 $C = (c_{ij})$:

$$c_{ij} = \langle [x_{ik}(t) - \bar{x}(t)][x_{jk}(t) - \bar{x}(t)] \rangle \quad (9)$$

其中: $\bar{x}(t) = (1/N) \sum_{i=1}^N x_{ik}(t)$, $x_{ik}(t)$ 是节点 i 的某个含噪声的分量。对无向网络有式(10)成立, C^+ 是矩阵 C 的伪逆。

$$L = [\sigma^2 / 2\delta] C^+ \quad (10)$$

基于噪声诱导的辨识方法不需要施加控制且具有普适性, 其正确率依赖于阈值的选择, 如果阈值选取的不恰当, 可能导致一些边就不能被正确辨识。Chen Juan^[29]等人利用 ROC 曲线分析法来确定阈值的选取, 提高了辨识的有效性。Wang Wenxu^[30]等人基于相同的方法考虑了时滞的影响。Ren Jie^[31]等人用该方法和 Kuramoto 节点模型对圣菲研究所合作网络的拓扑进行了辨识。

6 基于互信息理论的网络拓扑辨识方法

基于互信息理论对时间序列进行相关性分析从而达到网络拓扑辨识的目的。具体思路如下:

假设有时间序列 X, Z , 首先创建数据的概率分布曲线, 然后利用式(11)计算互信息:

$$MI(x_i; z_j) = \log_2 \frac{p(x_i | z_j)}{p(x_i)} \quad (11)$$

平均互信息为:

$$MI(X; Z) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i z_j) MI(x_i; z_j) \quad (12)$$

考虑具有 G 个节点的网络, 计算 $(G(G-1)/2)$ 对节点之间的互信息, 并对结果进行规范化, 将计算结果 MI_{xz} 与选定的 $(0-1)$ 之间的某一阈值比较, 当互信息大于阈值时, 邻接矩阵对应的元素取为 1, 否则为 0。

Martinez Bianco^[32]等人基于互信息率对连续和离散系统进行网络拓扑辨识, 分析了耦合强度、时间序列长度等对辨识的影响。考虑具有 3 个子系统

的因果链,则互信息分析可能错误地得到系统 1 和系统 3 存在耦合,Stefan Frenzel^[33]等人利用偏互信息分析剔出了间接连接关系,得到了正确的辨识结果。

7 各方法的特点分析

对现有文献分别从是否依赖网络先验知识、发表的时间、特点等方面进行总结,结果见表 1。

表 1 综述文献的汇总
Tab. 1 Summary of methods

分类法	文献	发表时间	网络先验知识	识别特点
完全同步*	[4]/[5]	2006/2007	条件①~⑥均满足	状态耦合模型,使得连接较复杂
	[7]	2010	条件①~⑥均满足	将输出变量作为反馈信号,简化连接
	[11]	2008	条件①不满足	能同时辨识系统参数和拓扑参数
	[13]	2007	条件③不满足	要求可测的状态变量减少了,但是需要一个满足复杂不等式条件的正定函数
	[14]	2009	条件⑤不满足	提出去同步方法:改变耦合强度和输出函数
	[15]	2012	条件⑤不满足	分析瞬态过程对网络拓扑辨识的影响
广义外同步*	[16]	2014	条件⑤不满足	非同步状态数据进行离线存储后重复使用
	[6]	2014	条件①~⑥均满足	待辨识网络较复杂、维数较高时,简化响应网络的构造
相同步*	[8]	2014	条件⑤不满足	针对 kuramoto 模型修改固有频率独立重复实验 N 次
	[9]	2007	条件⑤不满足	在固有频率的基础上施加常数驱动信号
基于优化方法	[18]	2013	条件③和⑤不满足	利用量子粒子群优化算法进行搜索求解,该方法不但能辨识有内同步发生的网络,而且利用的节点信息少
	[19]	2011	条件③和⑤不满足	利用投影共轭梯度算法进行搜索求解,同时对网络拓扑参数和时滞辨识成功
	[20]	2013	条件⑤不满足	利用混沌蚂蚁群优化算法进行搜索求解,搜索时间较长
	[21]	2015	条件①~⑥均满足	研究特定的稀疏网络,提出一个带有正则化的最小二乘模型,利用加权迭代最小二乘算法进行搜索求解
基于压缩感知方法	[22]	2016	条件①不满足	利用幂级数展开来近似节点模型,为充分覆盖整个相空间的动力学,采样频率应该足够小
	[23]	2011	条件①不满足	利用幂级数展开来近似节点模型,时滞项进行一阶泰勒近似,同时辨识拓扑参数和时滞
	[24]	2015	条件①不满足	利用泰勒展开来近似未知节点模型,泰勒展开的阶次与观测数据有效的邻域半径有关
	[26]	2014	条件①和⑥不满足	对神经网络拓扑和节点动力学进行重构,然后辨识网络中的混沌单元
	[27]	2011	条件①和⑥不满足	对进化博弈模型进行网络拓扑重构,当网络规模越大,待辨识向量越稀疏,成功辨识所需的数据越小
基于噪声诱导方法	[28]	2010	条件①~⑥均满足	不需要施加控制,其正确率依赖于阈值的选择
	[29]	2014	条件①~⑥均满足	用 ROC 曲线分析法确定阈值,提高了辨识的有效性
	[30]	2012	条件①~⑥均满足	考虑耦合作用时滞的影响
	[31]	2007	条件①~⑥均满足	针对 kuramoto 模型进行网络连接关系辨识
基于互信息理论方法	[32]	2016	条件①~⑥均满足	由于互信息率考虑了相关性衰减时间,当系统中存在不同的时间尺度时,互信息率比互信息具有更好辨识效果
	[33]	2007	条件①~⑥均满足	利用偏互信息分析剔出了间接连接关系

注:*代表基于同步方法。

表中提到的条件①~⑥见引言。基于同步的方法中,区分了响应系统的构造类型,而相同步主要针对

对 kuramoto 模型描述的复杂网络。基于优化思想的方法中,区分了搜索求解的算法,不同的搜索机

制,有着不同的收敛速度和精度。基于压缩感知理论的方法中,区分了未知节点模型近似的方式以及在不同背景下的应用问题。基于噪声诱导的方法中,区分了阈值选取的方式。基于互信息理论的方法中,区分了相关性分析的方式。

8 总结与展望

在过去的十几年中,针对动力学方程已知基于同步的拓扑辨识方法已经相对比较成熟。但是这些方法要求节点的所有状态均可测,对网络的所有节点施加控制。如何利用尽量少的信息和小的成本达到拓扑辨识的目的仍然是一个具有挑战性的问题。在未来的研究工作可以在以下两个方面展开:

8.1 降低辨识成本

节约拓扑辨识的成本可以从两个层面来理解:1)减小待辨识网络信息的依赖性;2)减小构造响应网络的成本。可以利用输出变量作为耦合信号来降低对于网络状态变量可测的要求。对于大规模网络,根据一定原则,有选择的对网络中的部分节点施加控制,从而减少控制器个数,同时可以引入脉冲控制在某些离散的時刻施加控制。

8.2 局部网络辨识

面对较庞大的网络我们可能只关心局部的子网络,如何对局部网络进行拓扑辨识是一个值得考虑的问题。进行局部网络辨识时可以将不关心的节点动力学看作外部扰动,然后基于已有的方法设计控制器只对关心的节点的拓扑进行辨识。

目前辨识的网络拓扑大多是静态的,对动态网络的辨识和监控也是一个值得探究的问题。

参考文献:

- [1] PORFIRI M, STILWELL D J, BOLLT E M. Synchronization in random weighted directed networks [J]. IEEE Transactions Circuits and Systems-I, 2008, 55(10):3170-3177.
- [2] YU W, DELELLIS P, CHEN G, et al. Distributed adaptive control of synchronization in complex networks [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2012, 57(8): 2153-2158.
- [3] REN Haipeng, HUANG Xiaona, HAO Jiaxuan. Finding robust adaptation gene regulatory networks using multi-objective genetic algorithm [J]. IEEE/ACM Transactions on Computational Biology and Bioinformatics, 2016, 13(3):571-577.
- [4] YU D, RIGHERO M, KOCAREV L. Estimating topology of networks[J]. Physical Review Letters, 2006, 97(18): 188701.
- [5] ZHOU Jin, LU Jun, an. Topology identification of weighted complex dynamical networks[J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2007, 386(1):481-491.
- [6] ZHANG Shuna, WU Xiaoqun, LU Jun, an, et al. Recovering structures of complex dynamical networks based on generalized outer synchronization [J]. IEEE Transactions Circuits and Systems-I, 2014, 61(11): 3216-3224.
- [7] 万佑红,王锁萍,蒋国平. 基于观测器的复杂网络辨识新方法研究[J]. 电子学报,2010,38(5):1064-1068.
WAN Youhong, WANG Suoping, JIANG Guoping. A new state-observer-based approach to the identification of complex dynamical networks[J]. Chinese Journal of Electronics, 2010, 38(5):1064-1068.
- [8] LI Suhong, LI Fan, LIU Weiqing. Network reconstruction by linear dynamics[J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2014, 404(24):118-125.
- [9] TIMME M. Revealing network connectivity from response dynamics[J]. Physical Review Letters, 2007, 98(22):1-4.
- [10] XU Junqun, ZHANG Jianxiong, TANG Wansheng. Parameters and structure identification of complex delayed networks via pinning control [J]. Transactions of the Institute of Measurement and Control, 2012, 35(5): 619-624.
- [11] LIU Hui, LU Jun, an, LÜ Jinhua. Topology identification of an uncertain general complex dynamical network [C]. Proceedings of 2008 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS), 2008: 109-112.
- [12] ZHOU Jin, YU Wenwu, LI Xiumin, et al. Identifying the topology of a coupled FitzHugh-Nagumo neurobiological network via a pinning mechanism [J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2009, 20(10): 1679-1684.
- [13] WALLACE K S, YU M, KOCAREV L. Identification and monitoring of biological neural network [C]// Proceedings of 2007 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS), 2007:2646-2649.
- [14] CHEN Liang, LU Jun, an, TSE C K. Synchronization: an obstructer in identifying network topology based on adaptive-feedback control algorithm [J]. IEEE Transactions Circuits and Systems-II, 2009, 56(4):310-314.
- [15] SUN Fei, PENG Haipeng, XIAO Jinghua, et al. Identifying topology of synchronous networks by analy-

- zing their transient processes[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2012, 67(2): 1457-1466.
- [16] YANG Pu, ZHENG Zhigang. Repeated-drive adaptive feedback identification of network topologies [J]. *Physical Review E*, 2014, 90(5):052818.
- [17] LIU Danfeng, WU Zhaoyan, YE Qingling. Structure identification of an uncertain network coupled with complex-variable chaotic systems via adaptive impulsive control [J]. *Chinese Physics B*, 2014, 23(4):040504.
- [18] TANG Shengxue, CHEN Li, HE Yigang. Optimization-based topology identification of complex networks [J]. *Chinese Physics B*, 2011, 20(11):110502.
- [19] HE Tao, LU Xiliang, WU Xiaoqun, et al. Optimization-based structure identification of dynamical networks[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2013, 392(4):1038-1049.
- [20] PENG Haipeng, LI Lixiang, KURTHS J, et al. Topology identification of complex network via chaotic ant swarm algorithm[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2013, 2013(3):401983.
- [21] KE Tingting. Structure identification of a sparse complex network[J]. *Journal of Mathematics*, 2015, 35(4):763-772.
- [22] WANG Wenxu, YANG Rui, LAI Yingcheng, et al. Time-series-based prediction of complex oscillator networks via compressive sensing[J]. *Euro-physics Letters*, 2011, 94(4):48006.
- [23] SU Riqi, WANG Wenxu, WANG Xiao, et al. Data-based reconstruction of complex geospatial networks, nodal positioning and detection of hidden nodes[J]. *Royal Society Open Science*, 2016, 3(1):150577.
- [24] LI Guangjun, WU Xiaoqun, LIU Juan, et al. Recovering network topologies via Taylor expansion and compressive sensing[J]. *Chaos An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2015, 25(4):043102.
- [25] SU Riqi, NI Xuan, WANG Wenxu, et al. Forecasting synchronizability of complex networks from data[J]. *Physical Review E Statistical Nonlinear & Soft Matter Physics*, 2012, 85(2):056220.
- [26] SU Riqi, LAI Yingcheng, WANG Xiao. Identifying chaotic FitzHugh-Nagumo neurons using compressive sensing[J]. *Entropy*, 2014, 16(7):3889-3902.
- [27] WANG Wenxu, LAI Yingcheng, GREBOGI C, et al. Network reconstruction based on evolutionary-game data via compressive sensing[J]. *Physical Review X*, 2011, 1(2): 021021.
- [28] REN Jie, WANG Wenxu, LI Baowen, et al. Noise bridges dynamical correlation and topology in coupled oscillator networks [J]. *Physical Review Letters*, 2010, 104(5): 058701.
- [29] CHEN Juan, LU Jun, an, ZHOU Jin. Topology identification of complex networks from noisy time series using ROC curve analysis[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2014, 75(4): 761-768.
- [30] WANG Wenxu, REN Jie, LAI Yingcheng, et al. Reverse engineering of complex dynamical networks in the presence of time-delayed interactions based on noisy time series[J]. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2012, 22(3):865-868.
- [31] REN Jie, YANG Huijie. Synchronization reveals correlation between oscillators on networks [J]. *arXiv preprint cond- mat/0703232*, 2007.
- [32] MARTINEZ E B, RUBIDO N, ANTONOPOULOS C G, et al. Successful network inference from time-series data using mutual information rate[J]. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2016, 26(4):043102.
- [33] FRENZEL S, POMPE B. Partial mutual information for coupling analysis of multivariate time series [J]. *Physical Review Letters*, 2007, 99(20):204101.

(责任编辑 杨小丽)