DOI: 10.19322/j.cnki.issn.1006-4710.2017.01.013

伪效应代数的极真算子

花秀娟[1]，孙晓青[1]，朱　熙[2]

(1.西安理工大学 理学院，陕西 西安 710054；2.西安航空学院 理学院，陕西 西安 710077)

摘要： 本文研究了伪效应代数的极真算子的问题。利用在与剩余格和基本代数中定义偏序概念相同的传统方式的方法，获得了极真算子的一些基本性质，研究了态射与恒等映射之间的关系。

关键词： 极真算子；伪效应代数；态射

中图分类号： O155　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1006-4710(2017)01-0071-03

Very true operator in pseudo effect algebras

HUA Xiujuan[1], SUN Xiaoqing[1], ZHU Xi[2]

(1. School of Sciences, Xi'an University of Technology, Xi'an 710054, China;
2. College of Science, Xi'an Aeronautical University, Xi'an 710077, China)

Abstract: This paper introduces the concept of very true operator on a pseudo effect algebra and defines a partial in the way that is in accordance with traditional definitions in residuated lattices or basic algebras, obtaining some basic properties of very true operator. Furthermore the relationship between morphism and identity mapping is studied.

Key words: very true operator; pseudo effect algebra; morphism

量子力学是上世纪初为了研究微观世界而创立的特别重要的物理学科。早在1936年，Birkhoff和von Neumann便率先探讨如何在可分复希尔伯特空间中建立适当的逻辑结构来描述量子理论。他们所用的方法是将可分复希尔伯特空间中的每个正交投影算子看作是一个量子效应，而将该空间中的所有闭子空间做成的格看作是整个量子力学的命题系统，通过研究这个命题系统的逻辑关系来解决量子力学数学公理化问题。从1989年以来，一些学者开始将希尔伯特空间中每个不大于恒等算子的正算子看作是一个量子效应，这种方法极大地扩展了所描述的物理现象[1-4]。1994年，美国数学家Foulis和Bennet进一步引进了抽象的效应代数概念，来作为建立量子力学数学基础的一般框架[5]。2001年，Dvurecenskij和Vetterlein引入了非交换的效应代数——伪效应代数的概念[6]。一些学者已经做了一些把效应代数作为全代数结构进行研究的尝试，并且得到了一些有意义的结果[7-10]。2010年，Chajda和Kuhr已经把这种方法扩展到任意的伪效应代数中[10]。2001年，在多值模糊逻辑中，为了减少可能的逻辑值的数量，Hajek提出了极真算子的概念。因为极真算子已经被成功地用于处理许多不同的逻辑问题，笔者把它扩展到伪效应代数中[12]。因为物理系统真的是非常大，因而伪效应代数系统也是很大的，笔者试图使用极真算子来减小它的逻辑值的数量。本文研究了伪效应代数的极真算子的性质，并且讨论了态射、映射和极真算子之间的关系。

1　预备知识

定义1[1]　设$(E;+,0,1)$是一个含有特殊元0,1的集合，分别称为零元和单位元，$+$是E上的一个部分二元运算，且对任意$a,b,c\in E$满足下列条件，那么称代数系统$(E;+,0,1)$是伪效应代数。如果$+$是交换的，E就称为效应代数。

(PE1)：$a+b$和$(a+b)+c$存在当且仅当$b+c$和$a+(b+c)$存在，并且$(a+b)+c=a+(b+c)$；

(PE2)：存在唯一的$d,e\in E$，使得$a+d=e+a=1$；

(PE3)：如果$a+b$存在，则有元素$d,e\in E$，使得$a+b=d+a=b+e$；

(PE4)：如果$1+a$或者$a+1$存在，则$a=0$。

从(PE2)可以定义两个一元运算$*$和$-$，使得

收稿日期： 2016-03-24

基金项目： 陕西省教育厅科研计划资助项目(14JK1535)；西安理工大学科学研究计划资助项目(2015CX009,2016CX11)

作者简介： 花秀娟，女，讲师，博士，研究方向为模糊代数与不确定性理论。E-mail: huaxiujuan1028@163.com

对任意 $a\in E$，有 $a+a^{*}=a^{-}+a=1$，$a^{*-}=a^{-*}=a$。笔者也定义伪效应代数的一个偏序，即 $a\leqslant b$ 当且仅当存在一些 $c\in E$ 使得 $a+c=b$。

定义2 设$(L;+,0,1)$满足公理(PE1)，(PE2)和(PE3)，且满足(PE4′)，则称代数结构$(L;+,0,1)$是伪弱效应代数。

(PE4′)：对 $a,b\in L$，如果 $a\leqslant b$，则存在一个最大的 $\bar{a}\leqslant a$ 和 $x\in L$，使得 $\bar{a}+x=b$。

引理1[6] 设$(E;+,0,1)$是一个伪效应代数。对任意 $a,a_1,b,b_1\in E$，下列描述成立：

1) $\leqslant$是 E 上的一个偏序；

2) $a\leqslant b$ 当且仅当 $b^{-}\leqslant a^{-}$ 当且仅当 $b^{*}\leqslant a^{*}$。这意味着 $*$ 和 $-$ 是 E 的序到 E 的对偶序的同构；

3) 如果 $a+b$ 存在，$a_1\leqslant a$ 且 $b_1\leqslant b$，则 a_1+b_1 也存在；

4) $a+b$ 存在，当且仅当 $a\leqslant b^{-}$，当且仅当 $b\leqslant a^{*}$；

5) 假设 $b+c$ 存在，则 $a\leqslant b$ 当且仅当 $a+c$ 存在且 $a+c\leqslant b+c$。假设 $c+b$ 存在，则 $a\leqslant b$ 当且仅当 $c+a$存在且 $c+a\leqslant c+b$。

例1[6] 设 $G=Z\times Z\times Z$，对 G 中任意两个元素，定义：

$$(a_1,b_1,c_1)+(a_2,b_2,c_2)=\begin{cases}(a_1+a_2,b_1+b_2,c_1+c_2) & \text{若 } a_2 \text{ 是偶数}\\(a_1+a_2,b_2+c_1,b_1+c_2) & \text{若 } a_2 \text{ 是奇数}\end{cases}$$

且假设$(a_1,b_1,c_1)\leqslant(a_2,b_2,c_2)$，若 $a_1\leqslant a_2$ 或 $a_1=a_2$，$b_1\leqslant b_2$ 且 $c_1\leqslant c_2$，则$(G;+,0)$是格序非交换群，且 Γ 就成为了一个伪效应代数。Γ 表达式见式(1)。

$$\Gamma(G,(1,0,0))=\{(0,b,c)\mid b\geqslant 0,c\geqslant 0\}\cup\{(1,b,c)\mid b\leqslant 0,c\leqslant 0\}\quad(1)$$

定义3[12] 设$(E;+,0_E,1_E)$和$(E;+,0_F,1_F)$是伪弱效应代数。如果对任意 $a,b\in E$ 满足以下条件，则称映射 $\tau:E\to F$ 为态射。

1) 如果 $a\leqslant b$，则 $\tau(a)\leqslant\tau(b)$；

2) 如果 $a+b$ 有定义，则 $\tau(a)+\tau(b)$有定义，且 $\tau(a+b)=\tau(a)+\tau(b)$；

3) $\tau(0_E)=0_F$ 且 $\tau(1_E)=1_F$。

如果一个态射满足 $\tau(a)=0$ 当且仅当 $a=0$ 时，称其为忠实的(faithful)。

命题1[12] 任何伪效应代数是伪弱效应代数。

2 伪效应代数的极真算子

在伪效应代数中，可以派生一个偏序运算$\to$：

$$x\to y=x^{-}+y$$

注意 $x\to y$ 有定义当且仅当 $y\leqslant x$ 或 $x^{-}\leqslant y^{-}$ 或$x^{*}\leqslant y^{*}$。

定义4 设$(E;+,0,1)$是一个伪效应代数，且 $t:E\to E$ 是一个映射。如果 t 满足下列条件，则称它是 E 的一个极真算子(vt-operator)。

(vt1)：$t(1)=1$；

(vt2)：$t(x)\leqslant x$；

(vt3)：如果 $x\to y$ 有定义，则 $t(x)\to t(y)$有定义，且 $t(x\to y)\leqslant t(x)\to t(y)$；

(vt4)：$t(t(x))=t(x)$；

(vt5)：$y\leqslant x$ 蕴含 $t(y)\leqslant t(x)$。

引理2 设 t 是伪效应代数 E 的一个极真算子，则：

1) $t(0)=0$；

2) $t(x^{-})\leqslant t(x)^{-}$；

3) $t(x)=1$ 当且仅当 $x=1$。

证明 1) 由(vt2)可得 $t(0)\leqslant 0$。因为 0 是 E 的最小元素，所以有 $t(0)=0$。

2) 由派生的偏序运算的定义可知，$x^{-}=x\to 0$。又由定义4的(vt3)和1)可得：

$$t(x^{-})=t(x\to 0)\leqslant t(x)\to t(0)=t(x)\to 0=t(x)^{-}$$

3) 如果存在 $x\in E$ 使得$t(x)=1$，结合(vt2)，有 $1=t(x)\leqslant x$，可知 $x=1$。反之由(vt1) $t(1)=1$ 可得到。

引理3 设$(E;+,0,1)$是一个伪效应代数且$\to$是派生的偏序运算。假设对 $x,y\in E$，$x\to y$ 有定义。设 $a,b\in E$，$x\leqslant a$，$y\leqslant b$，则 $a\to b$ 有定义。

证明 正如在引理1的3)中所指出的，如果 $a+b$ 存在，$a_1\leqslant a$ 且 $b_1\leqslant b$，则 a_1+b_1 也存在。然而 $x\to y=x^{-}+y$ 并且 $x\mapsto x^{-}$(或 $x\mapsto x^{*}$)是逆序的。即如果 $a\geqslant x$，则 $a^{-}\leqslant x^{-}$(或 $a^{*}\leqslant x^{*}$)。因而假设 $x\to y$ 有定义，所以 $a^{-}+b$ 有定义，从而 $a\to b$ 有定义。

定理1 设$(E;+,0,1)$是一个伪效应代数，$t:E\to E$ 是它的一个极真算子。则下面论述是等价的：

1) t 是 E 到 E 的态射；

2) $t(x^{-})=t(x)^{-}$，$t(x^{*})=t(x)^{*}$；

3) t 是 E 的恒等映射。

证明 1)$\Rightarrow$2)，因为：

$$1=t(1)=t(x^{-}+x)=t(x^{-})+t(x);$$
$$1=t(1)=t(x+x^{*})=t(x)+t(x^{*})$$

所以：

$$t(x^{-})=t(x)^{-},\ t(x^{*})=t(x)^{*}$$

2)⇒3)，因为 $t(x)^{-}=t(x^{-})\leqslant x^{-}$，由引理 1 的 2) 有 $x\leqslant t(x)$，然而由 (vt2) 知 $x\geqslant t(x)$，所以 $t(x)=x$。

3)⇒1) 显然。

推论 1 设 $(E;+,0,1)$ 是一个伪效应代数，如果态射 $t:E\to E$ 是极真算子，则 t 为忠实的。

参考文献：

[1] BIRKHOOF G, VON NEUMANN J. The logic of quantum mechanics[J]. Annals of Mathematics. 1936, 37(4): 823-843.

[2] PULMANNOVA S. Quantum logics and Hilbert space [J]. Foundations of Physics. 1994, 24(10): 1403-1414.

[3] GIUNTINI R, GREULING H. Towards a formal language for unsharp properties[J]. Foundations of Physics. 1989, 19(7): 931-945.

[4] KOPKA F. D-Posets[J]. Mathematica Slovaca. 1994, 44: 21-34.

[5] FOULIS D J, BENNETT M K. Effect algebras and unsharp quantum logics[J]. Foundations of Physics. 1994, 24(10): 1331-1352.

[6] DVURECENSKIJ A, VETTERLEIN T. Pseudoeffect algebras. I. Basic properties[J]. International Journal of Theoretical Physics. 2001, 40(3): 685-701.

[7] GUDDER S. Total extensions of effect algebras[J]. Foundations of Physics Letters. 1995, 8(3): 243-252.

[8] GIUNTINI R. Quantum MV-algebras[J]. Studia Logica. 1996, 56(3): 393-417.

[9] GIUNTINI R, PULMANNOVA S. Ideals and congruences in effect algebras and QMV-algebras[J]. Communications in Algebra. 2000, 28(3): 1567-1592.

[10] CHAJDA I, KUHR J. Pseudo-effect algebras as total algebras[J]. International Journal of Theoretical Physics. 2010, 49(12): 3039-3049.

[11] HAJEK P. On very true[J]. Fuzzy Sets and System. 2001, 124(3): 329-333.

[12] GUO Jiansheng, LI Yongming, XIE Yongjian. Pseudo weak effect algebras and pseudo weak D-posets[J]. International Journal of Theoretical Physics, 2011, 50(4): 1175-1185.

（责任编辑　王绪迪，王卫勋）

（上接第 59 页）

[13] 胡建军，秦大同，孙冬野，等. 金属带式无级变速传动键合图建模及仿真[J]. 重庆大学学报(自然科学版)，2000，23(2)：1-5.
HU Jianjun, QIN Datong, SUN Dongye, et al. Modeling by bond graph and simulation for a metal pushing belt continuously variable transmission system [J]. Journal of Chongqing University (Natural Science Edition), 2000, 23(2): 1-5.

[14] 胡建军，秦大同，孙冬野，等. 金属带式无级变速传动系统仿真与控制研究[J]. 农业机械学报，2001，32(1)：27-30.
HU Jianjun, QIN Datong, SUN Dongye, et al. Modeling and control of a continuously variable transmission system with metal pushing belt[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2001, 32(1): 27-30.

[15] 王振，崔亚辉，刘凯，等. 装备单环路系统的整车行驶动力学研究[J]. 中国机械工程，2016，27(8)：1123-1129.
WANG Zhen, CUI Yahui, LIU Kai, et al. Research on driving dynamics for vehicles equipped with a single loop systems[J]. China Mechanical Engineering, 2016, 27(8): 1123-1129.

（责任编辑　王卫勋）